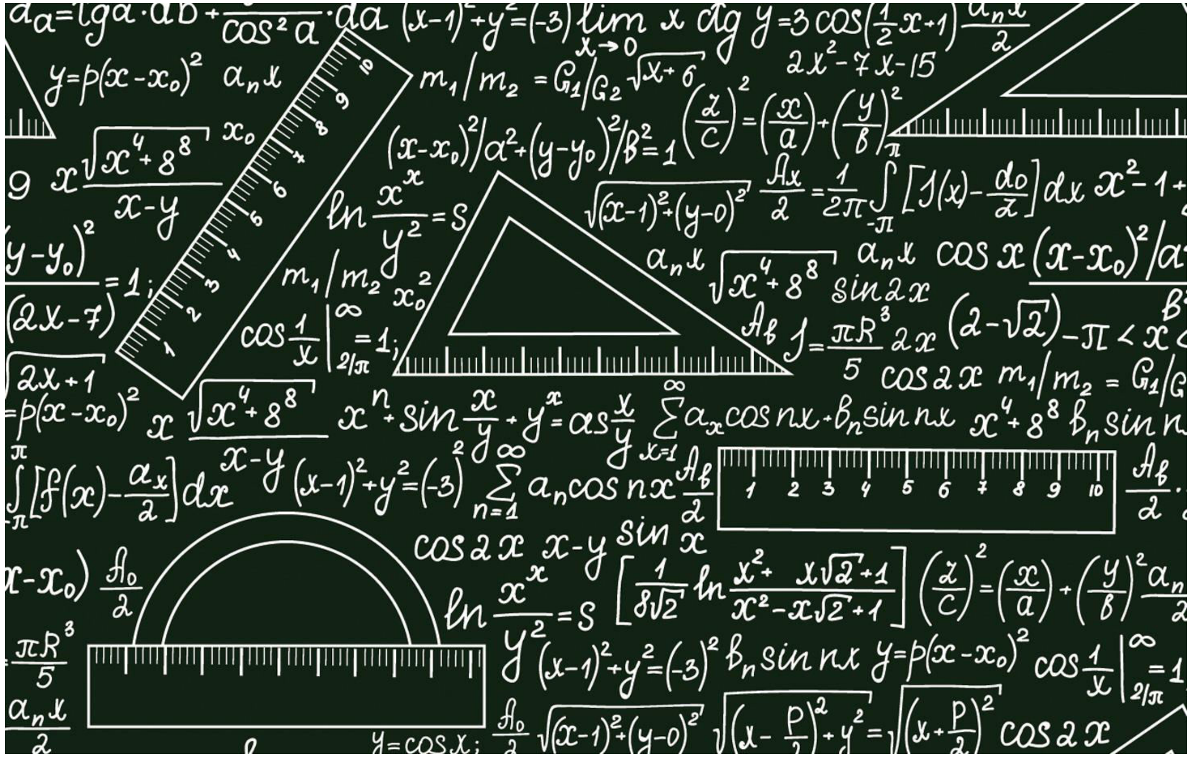
BAB 2
PEMBEZAAN
Bahagian 1

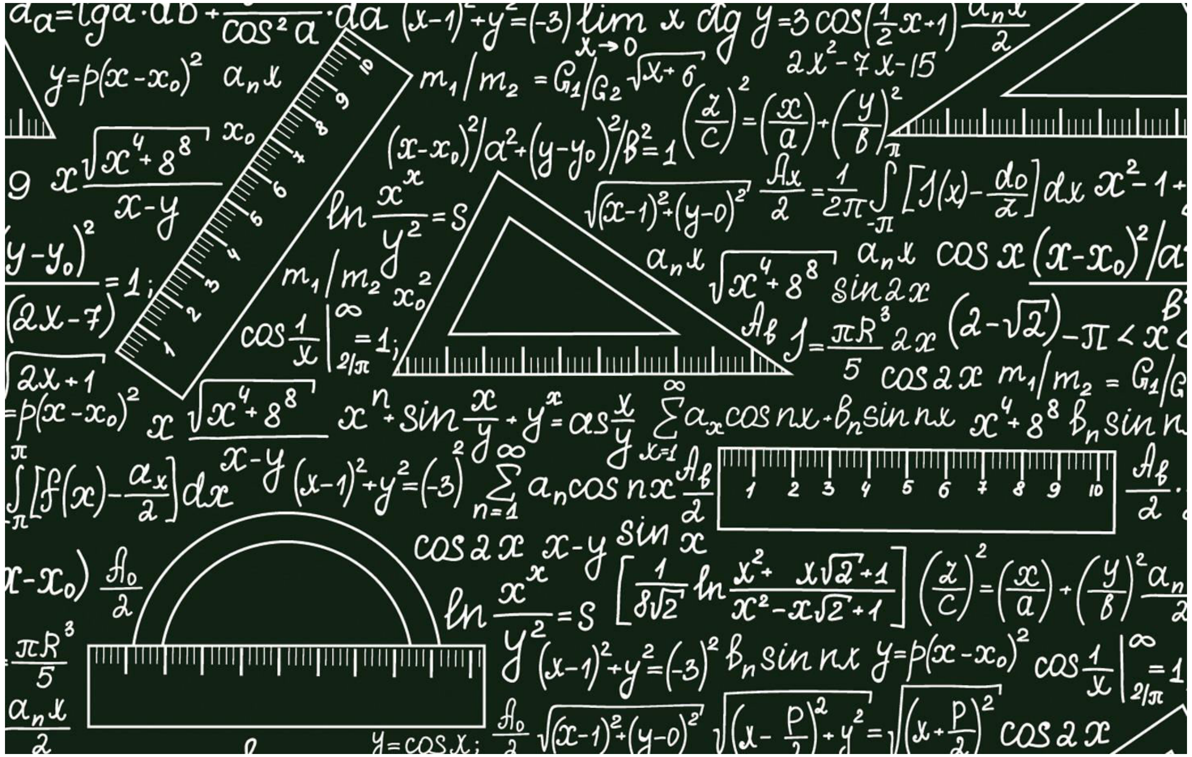
Matematik Tambahan Tingkatan 5 KSSM

Oleh Cikgu Norazila Khalid

Smk Ulu Tiram, Johor

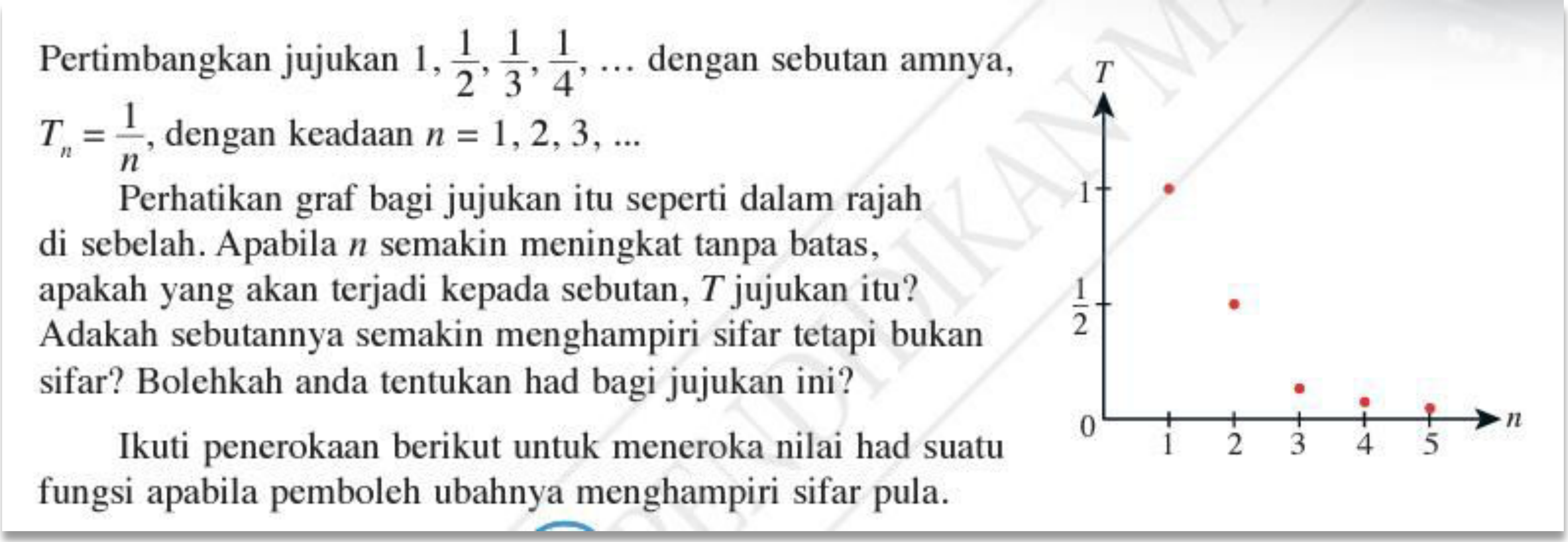


Had dan Hubungannya dengan Pembezaan



Had dan Hubungannya dengan Pembezaan

- Had merupakan konsep asas dalam operasi pembezaan seperti halaju, v suatu objek pada masa t yang disebut sebagai halaju seketika.
- Misalnya, semasa pemanduan, bacaan pada meter laju kenderaan anda menunjukkan halaju 80 kmj-1.
- Apakah yang dimaksudkan dengan bacaan halaju 80 kmj-1 pada meter laju itu?
- Bagaimanakah nilai 80 kmj-1 ini diperoleh?
- Dengan kaedah had, kita boleh menentukan nilai tersebut melalui nilai penghampiran.



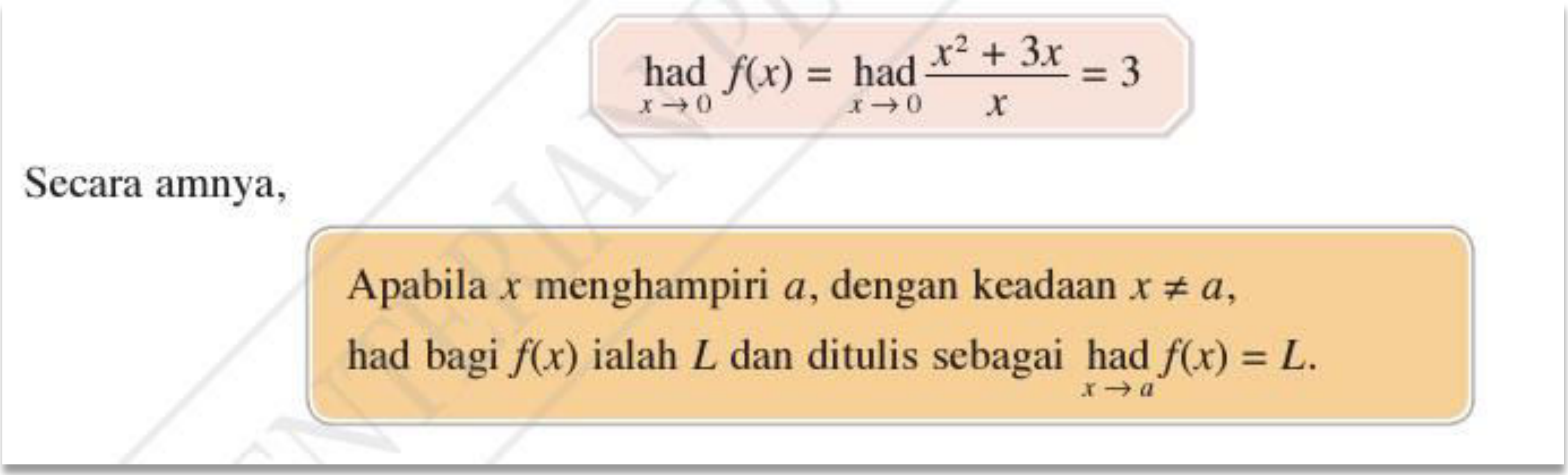
Pertimbangkan jujukan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … dengan sebutan amnya, $T_n = \frac{1}{n}$, dengan keadaan $n = 1, 2, 3, \ldots$

Perhatikan graf bagi jujukan itu seperti dalam rajah di sebelah. Apabila n semakin meningkat tanpa batas, apakah yang akan terjadi kepada sebutan, T jujukan itu? Adakah sebutannya semakin menghampiri sifar tetapi bukan sifar? Bolehkah anda tentukan had bagi jujukan ini?

Ikuti penerokaan berikut untuk meneroka nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubahnya menghampiri sifar pula.

Nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubah menghampiri sifar

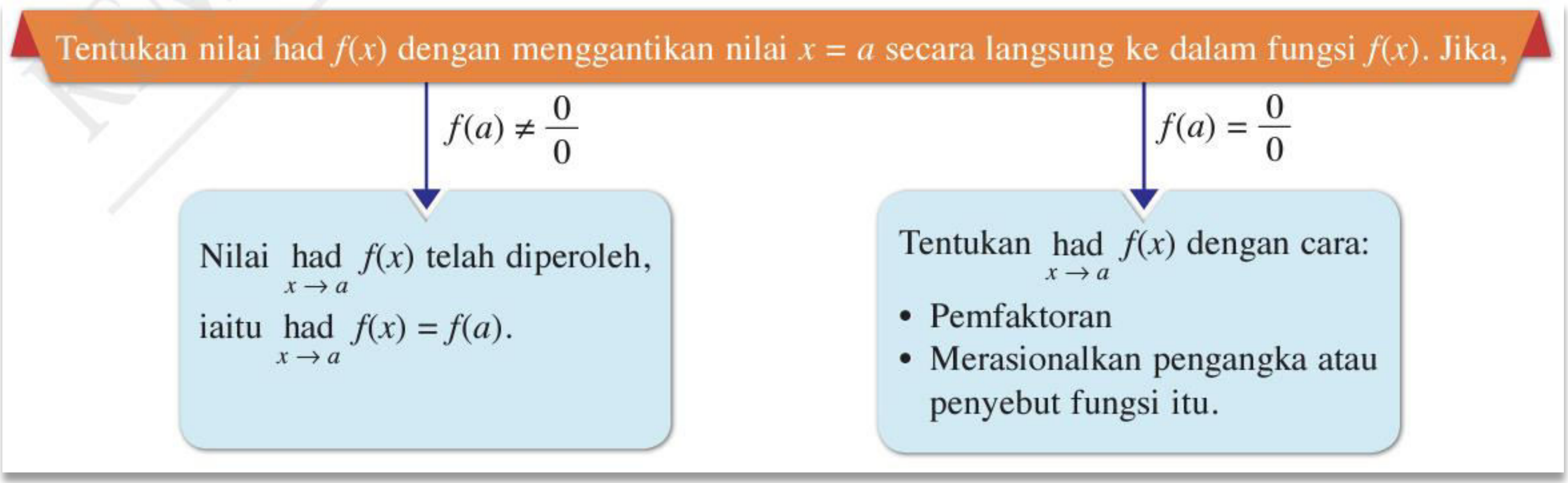
Nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubah menghampiri sifar



$$\underset{x \to 0}{\text{had}}\ f(x) = \underset{x \to 0}{\text{had}}\ \frac{x^2 + 3x}{x} = 3$$

Secara amnya,

Apabila x menghampiri a, dengan keadaan $x \neq a$, had bagi $f(x)$ ialah L dan ditulis sebagai $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x) = L$.



Tentukan nilai had $f(x)$ dengan menggantikan nilai $x = a$ secara langsung ke dalam fungsi $f(x)$. Jika,

$f(a) \neq \frac{0}{0}$

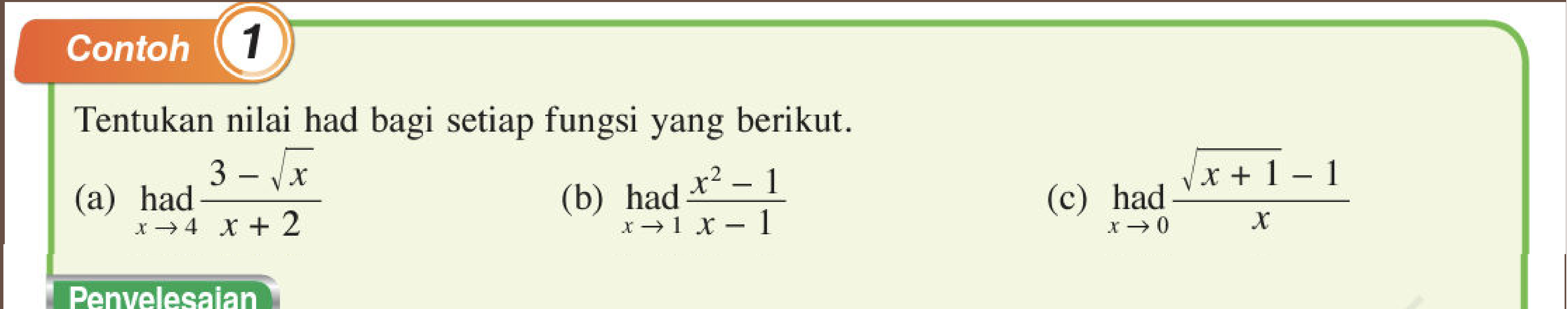
Nilai $\underset{x \to a}{\text{had}}\, f(x)$ telah diperoleh,
iaitu $\underset{x \to a}{\text{had}}\, f(x) = f(a)$.

$f(a) = \frac{0}{0}$

Tentukan $\underset{x \to a}{\text{had}}\, f(x)$ dengan cara:

- Pemfaktoran
- Merasionalkan pengangka atau penyebut fungsi itu.

Nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubah menghampiri sifar



Contoh 1

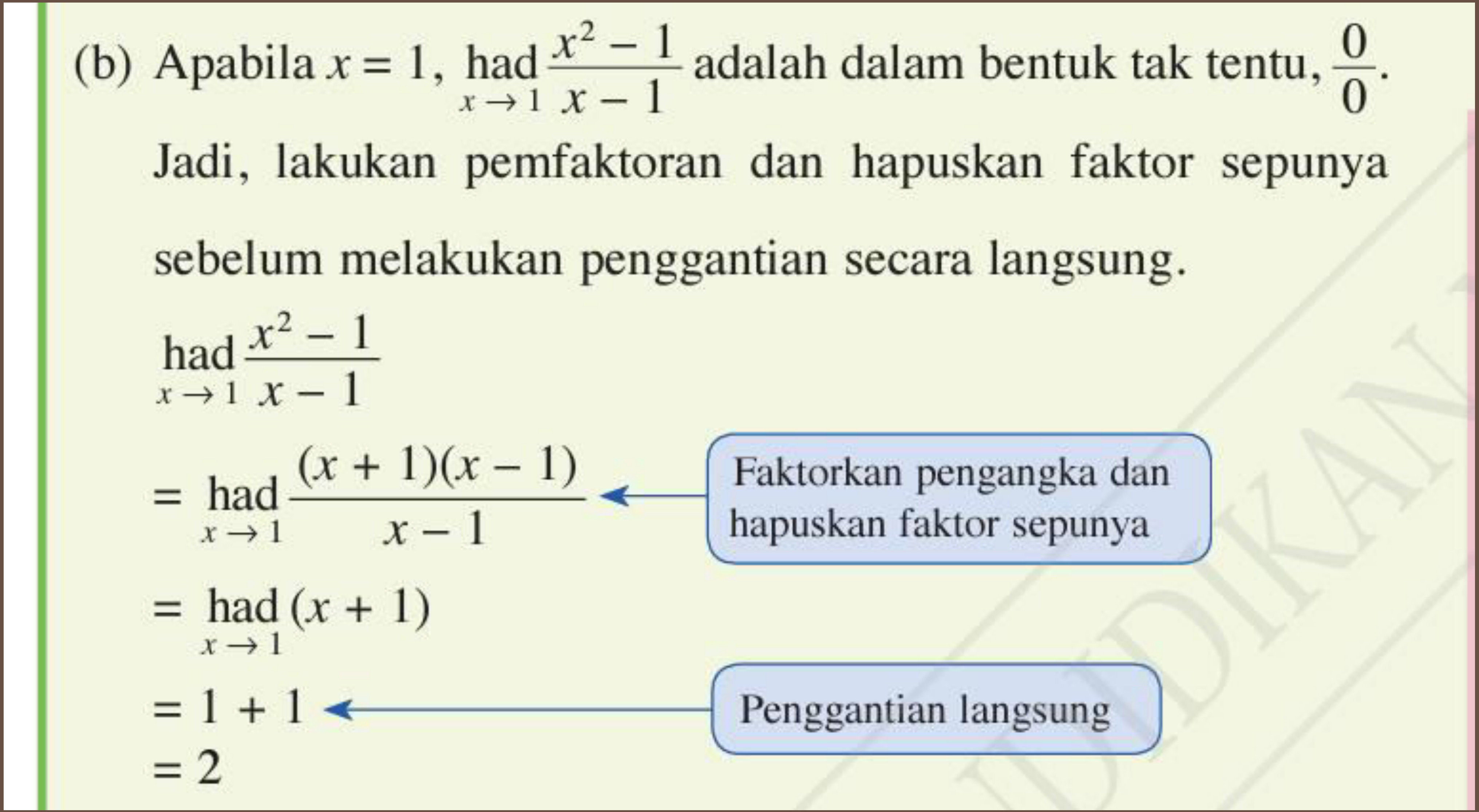
Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $\lim_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{x + 2}$ (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

Penyelesaian

(a) Gunakan penggantian secara langsung.

$$\underset{x \to 4}{\text{had}} \frac{3 - \sqrt{x}}{x + 2} = \frac{3 - \sqrt{4}}{4 + 2} = \frac{3 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$



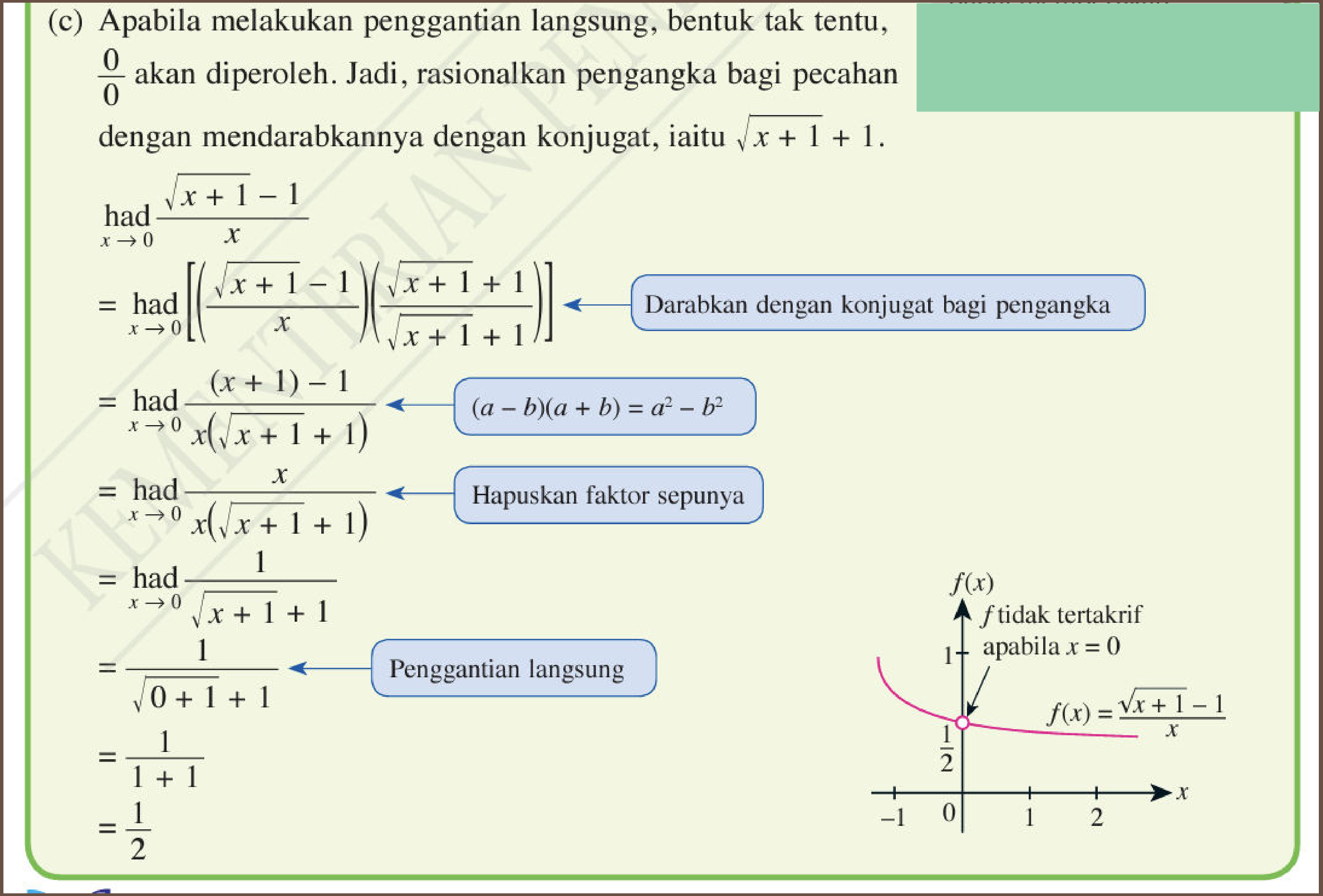
(b) Apabila $x = 1$, $\underset{x \to 1}{\text{had}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ adalah dalam bentuk tak tentu, $\dfrac{0}{0}$.

Jadi, lakukan pemfaktoran dan hapuskan faktor sepunya sebelum melakukan penggantian secara langsung.

$$\begin{aligned}
&\underset{x \to 1}{\text{had}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \underset{x \to 1}{\text{had}} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\
&= \underset{x \to 1}{\text{had}} (x + 1) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Faktorkan pengangka dan hapuskan faktor sepunya

Penggantian langsung



(c) Apabila melakukan penggantian langsung, bentuk tak tentu, $\frac{0}{0}$ akan diperoleh. Jadi, rasionalkan pengangka bagi pecahan dengan mendarabkannya dengan konjugat, iaitu $\sqrt{x+1}+1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right]$$

Darabkan dengan konjugat bagi pengangka

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

Hapuskan faktor sepunya

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}+1}$$

Penggantian langsung

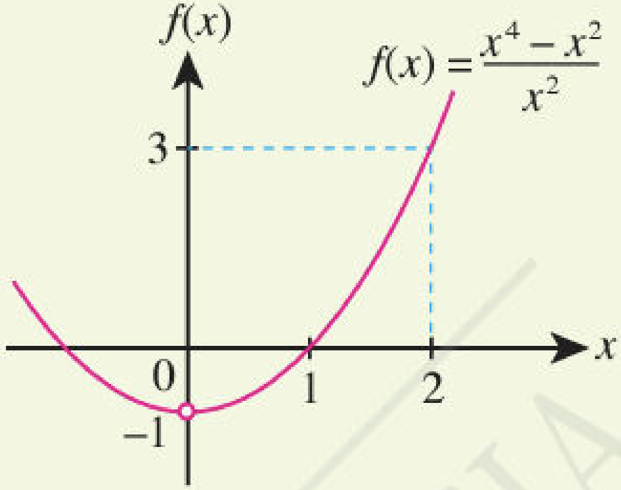
$$= \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Contoh 2

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2}$, $x \neq 0$. Berdasarkan graf, cari

(a) $f(0)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

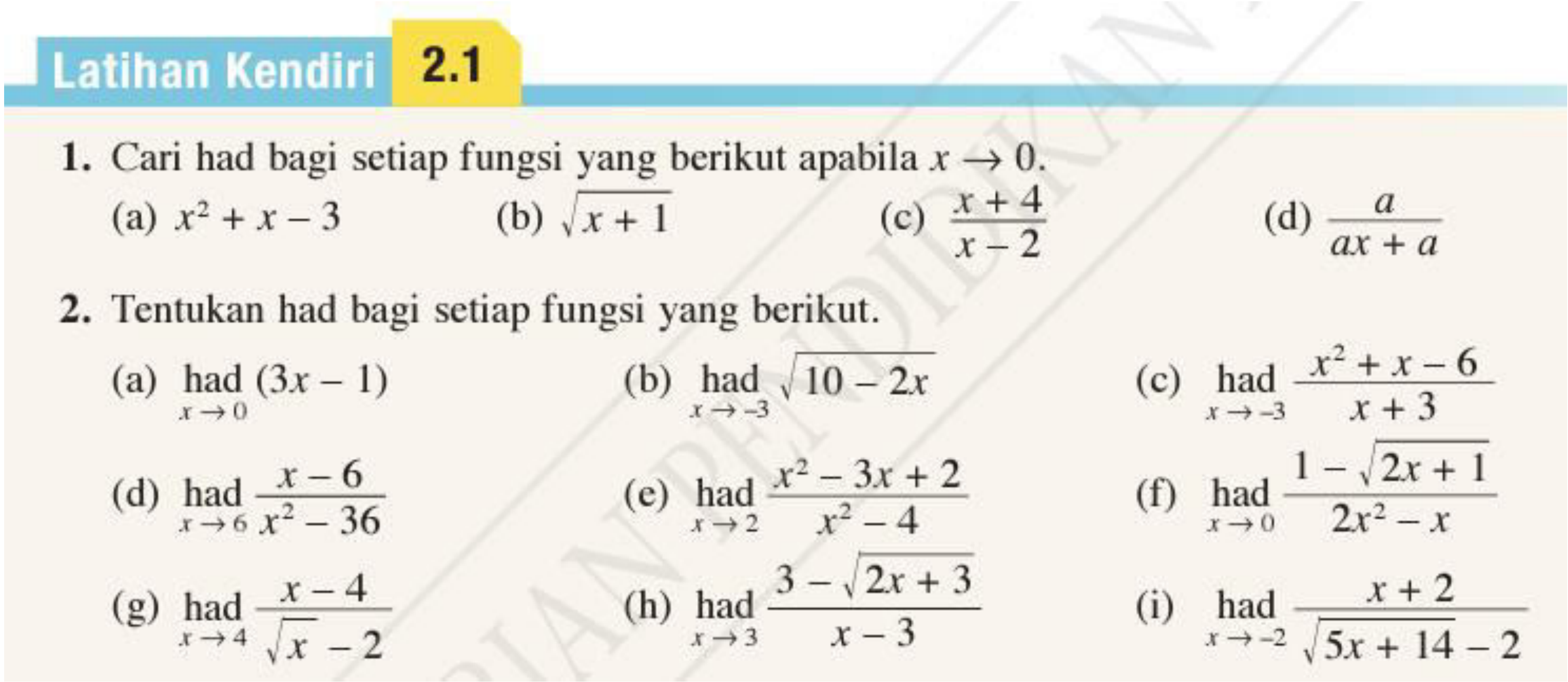


Penyelesaian

(a) Didapati bahawa tiada titik di $x = 0$. Maka, $f(0)$ tidak tertakrif di $x = 0$.

(b) Apabila $x \to 0$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \to -1$. Maka, $\underset{x \to 0}{\text{had}}\ f(x) = -1$.

(c) Apabila $x \to 2$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \to 3$. Maka, $\underset{x \to 2}{\text{had}}\ f(x) = 3$.



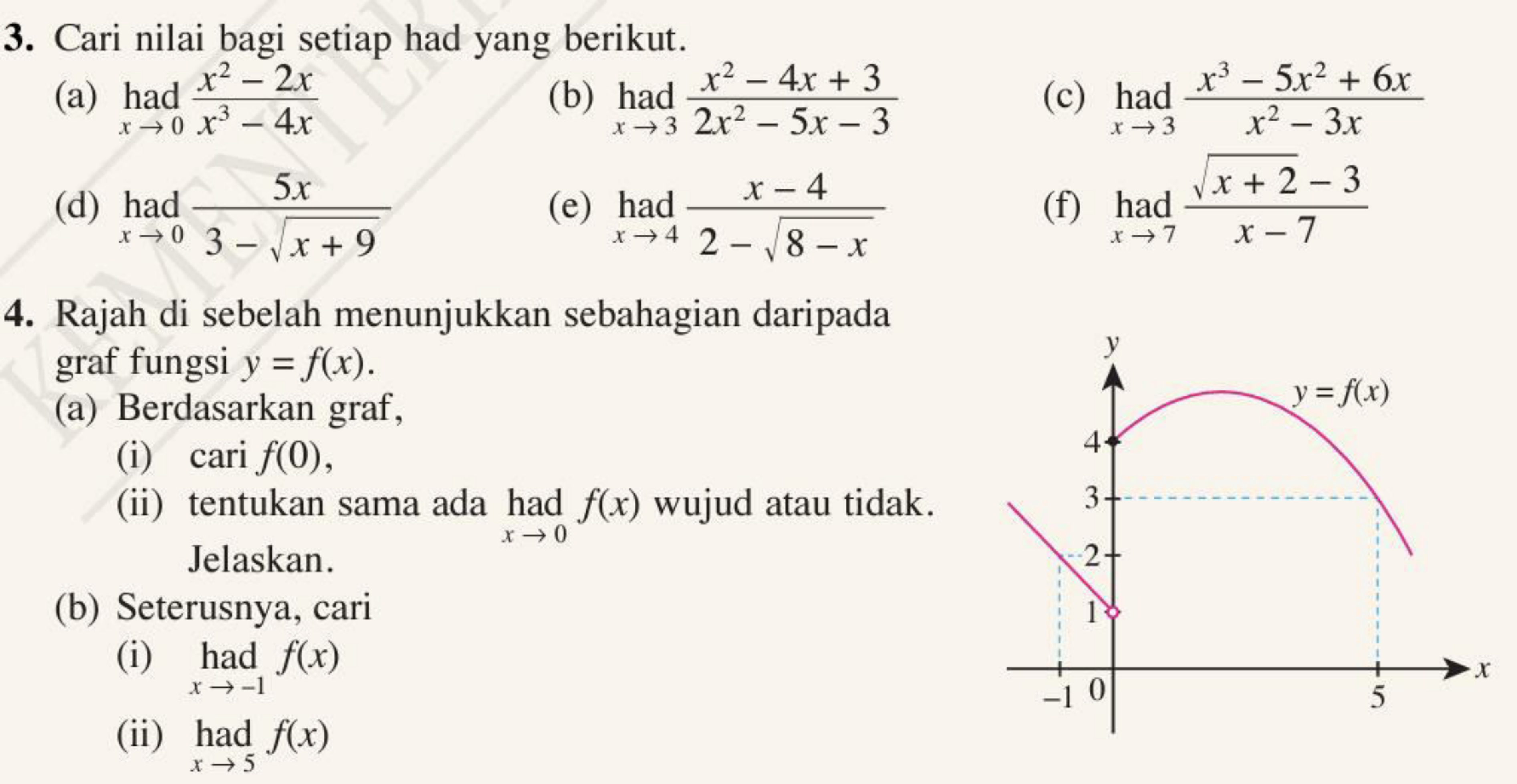
Latihan Kendiri 2.1

1. Cari had bagi setiap fungsi yang berikut apabila $x \to 0$.

   (a) $x^2 + x - 3$
   (b) $\sqrt{x + 1}$
   (c) $\dfrac{x + 4}{x - 2}$
   (d) $\dfrac{a}{ax + a}$

2. Tentukan had bagi setiap fungsi yang berikut.

   (a) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 0} (3x - 1)$
   (b) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to -3} \sqrt{10 - 2x}$
   (c) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$
   (d) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 6} \frac{x - 6}{x^2 - 36}$
   (e) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$
   (f) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{2x + 1}}{2x^2 - x}$
   (g) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$
   (h) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to 3} \frac{3 - \sqrt{2x + 3}}{x - 3}$
   (i) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x \to -2} \frac{x + 2}{\sqrt{5x + 14} - 2}$



3. Cari nilai bagi setiap had yang berikut.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 - 4x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$ (c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x}$

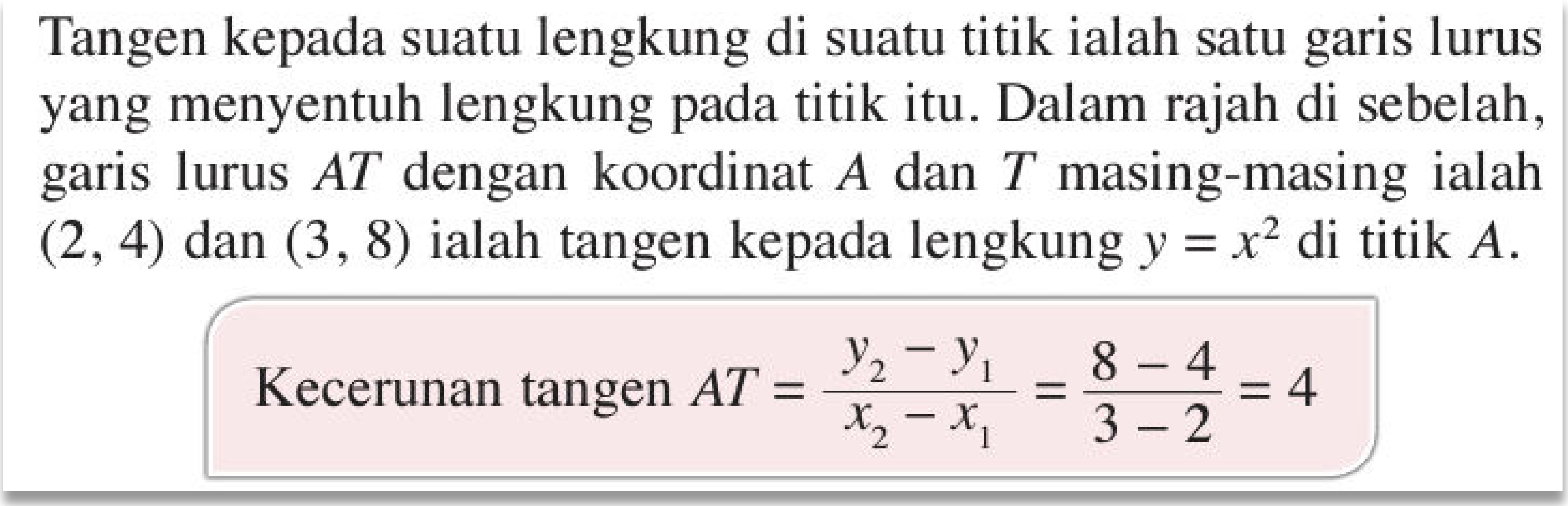
(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{3 - \sqrt{x + 9}}$ (e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{8 - x}}$ (f) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

(where "lim" is printed as "had")

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi $y = f(x)$.

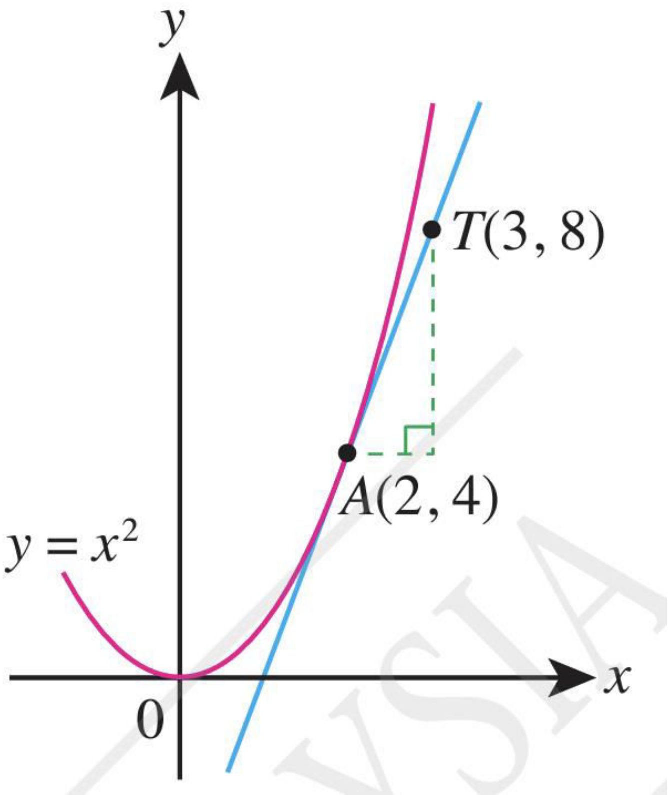
(a) Berdasarkan graf,
  (i) cari $f(0)$,
  (ii) tentukan sama ada $\underset{x \to 0}{\text{had}}\ f(x)$ wujud atau tidak. Jelaskan.

(b) Seterusnya, cari
  (i) $\underset{x \to -1}{\text{had}}\ f(x)$
  (ii) $\underset{x \to 5}{\text{had}}\ f(x)$



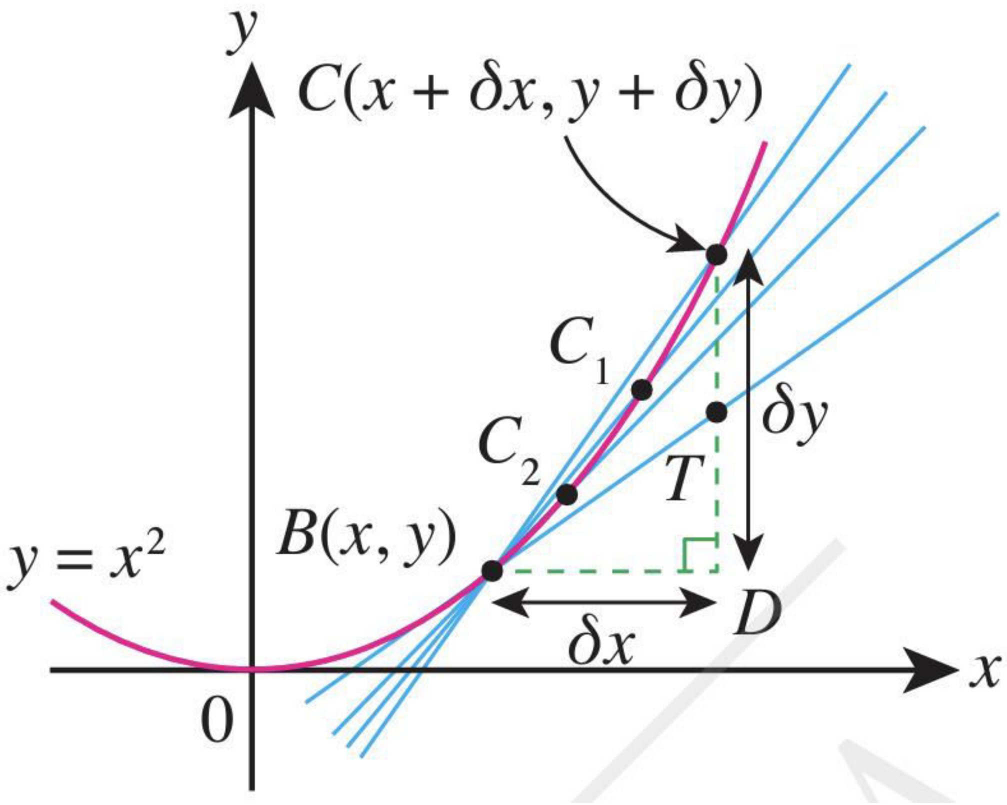
Tangen kepada suatu lengkung di suatu titik ialah satu garis lurus yang menyentuh lengkung pada titik itu. Dalam rajah di sebelah, garis lurus AT dengan koordinat A dan T masing-masing ialah (2, 4) dan (3, 8) ialah tangen kepada lengkung $y = x^2$ di titik A.

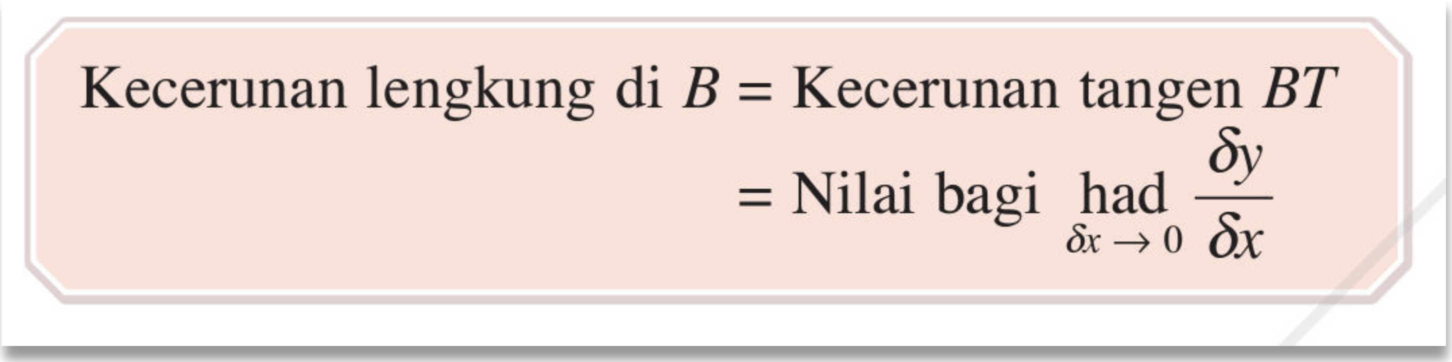
$$\text{Kecerunan tangen } AT = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = 4$$



Terbitan pertama suatu fungsi f(x) melalui pembezaan dengan prinsip pertama

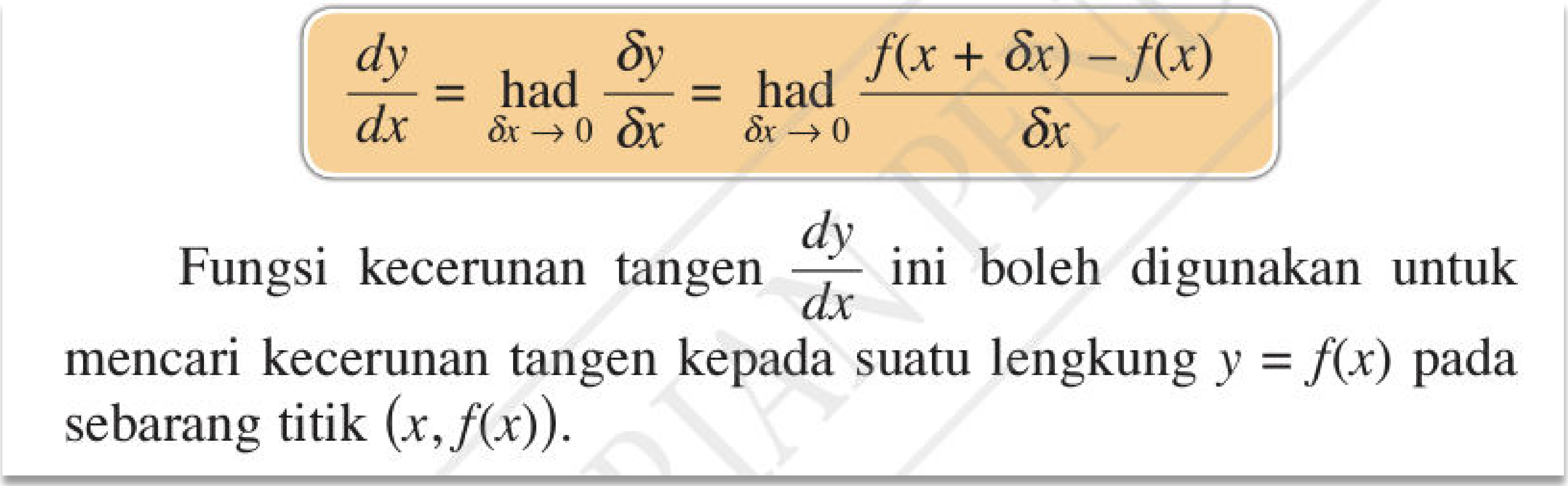
Terbitan pertama suatu fungsi f(x) melalui pembezaan dengan prinsip pertama





$$\text{Kecerunan lengkung di } B = \text{Kecerunan tangen } BT$$

$$= \text{Nilai bagi } \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$$

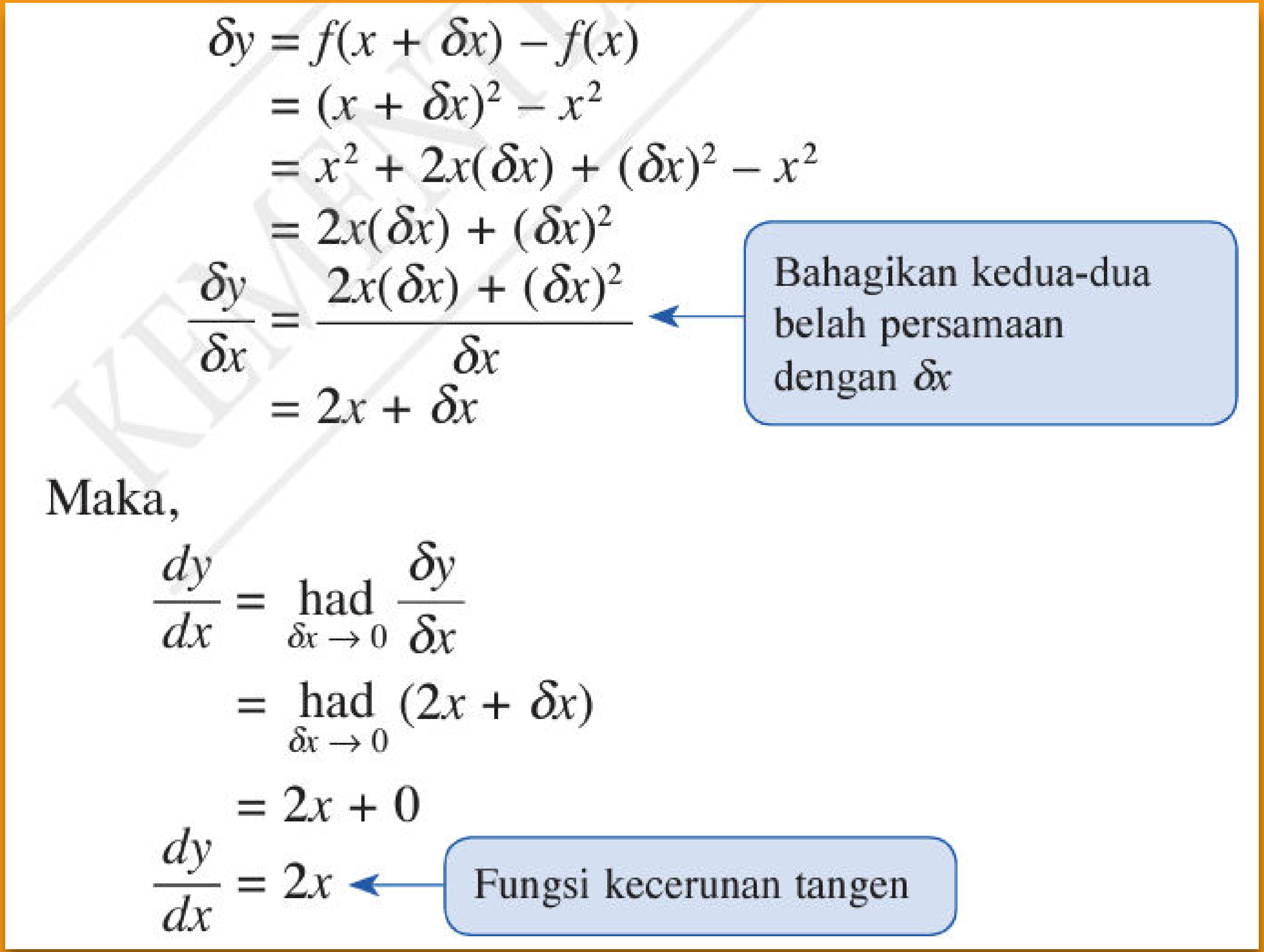


$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Fungsi kecerunan tangen $\frac{dy}{dx}$ ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan tangen kepada suatu lengkung $y = f(x)$ pada sebarang titik $(x, f(x))$.

Terbitan pertama suatu fungsi f(x) melalui pembezaan dengan prinsip pertama

Terbitan pertama suatu fungsi f(x) melalui pembezaan dengan prinsip pertama



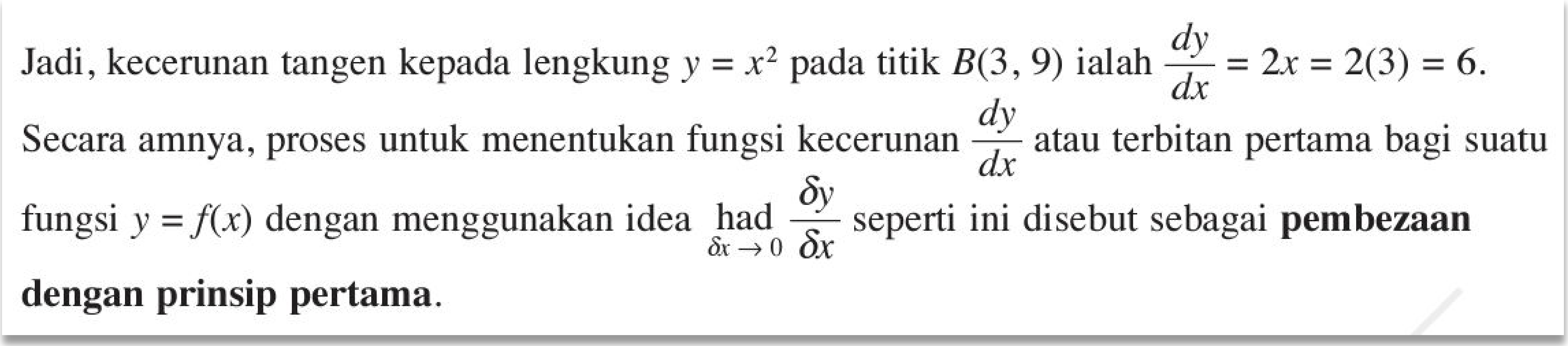
$$\begin{aligned}
\delta y &= f(x+\delta x) - f(x)\\
&= (x+\delta x)^2 - x^2\\
&= x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2\\
&= 2x(\delta x) + (\delta x)^2\\
\frac{\delta y}{\delta x} &= \frac{2x(\delta x) + (\delta x)^2}{\delta x}\\
&= 2x + \delta x
\end{aligned}$$

Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan δx

Maka,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}}\ \frac{\delta y}{\delta x}\\
&= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}}\ (2x + \delta x)\\
&= 2x + 0\\
\frac{dy}{dx} &= 2x
\end{aligned}$$

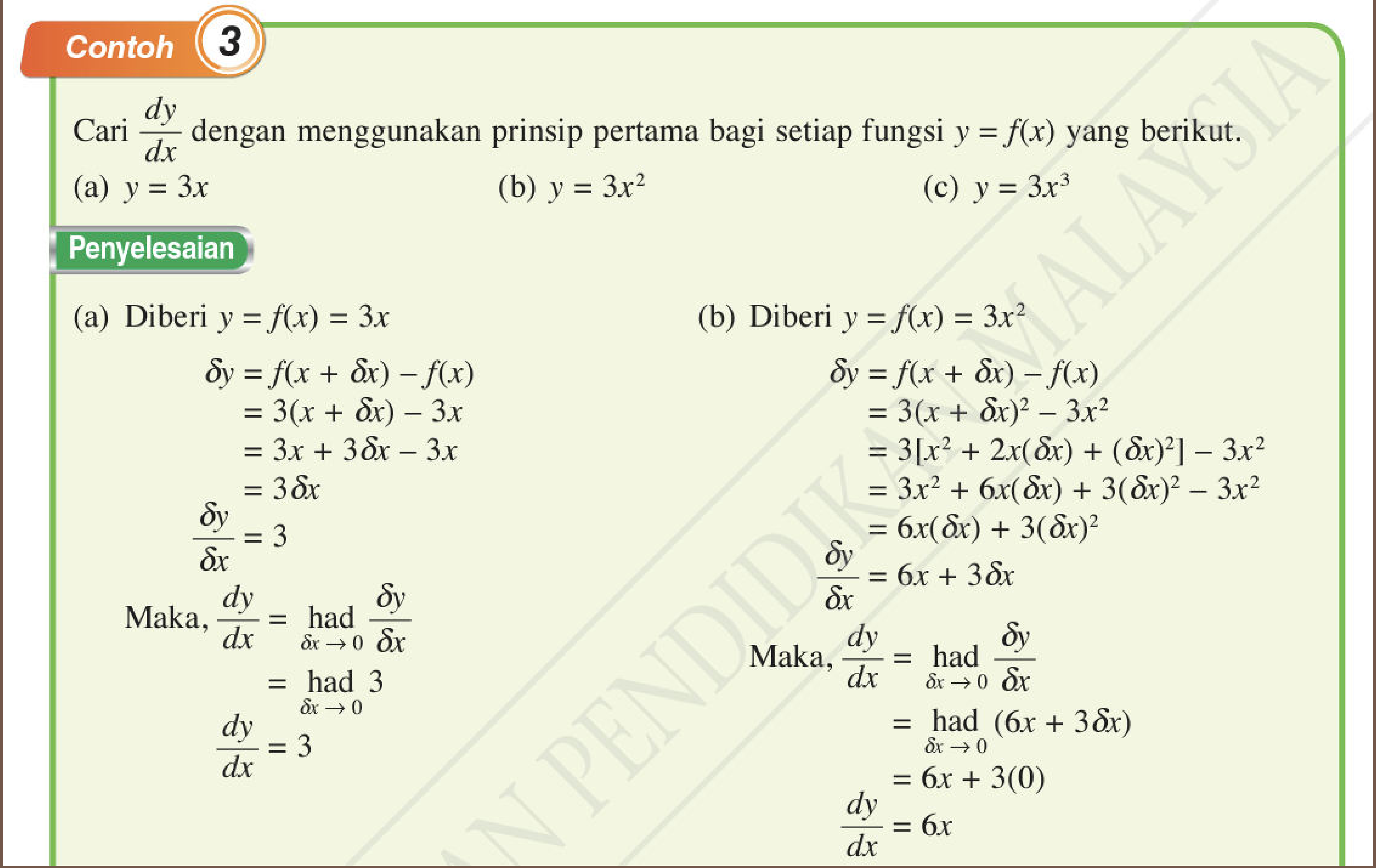
Fungsi kecerunan tangen



Jadi, kecerunan tangen kepada lengkung $y = x^2$ pada titik $B(3, 9)$ ialah $\frac{dy}{dx} = 2x = 2(3) = 6$.

Secara amnya, proses untuk menentukan fungsi kecerunan $\frac{dy}{dx}$ atau terbitan pertama bagi suatu fungsi $y = f(x)$ dengan menggunakan idea $\underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$ seperti ini disebut sebagai **pembezaan dengan prinsip pertama**.

Pembezaan dengan prinsip pertama.



Contoh 3

Cari $\dfrac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.

(a) $y = 3x$ (b) $y = 3x^2$ (c) $y = 3x^3$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = f(x) = 3x$

$$\begin{aligned} \delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \delta x) - 3x \\ &= 3x + 3\delta x - 3x \\ &= 3\delta x \\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Maka, } \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

(b) Diberi $y = f(x) = 3x^2$

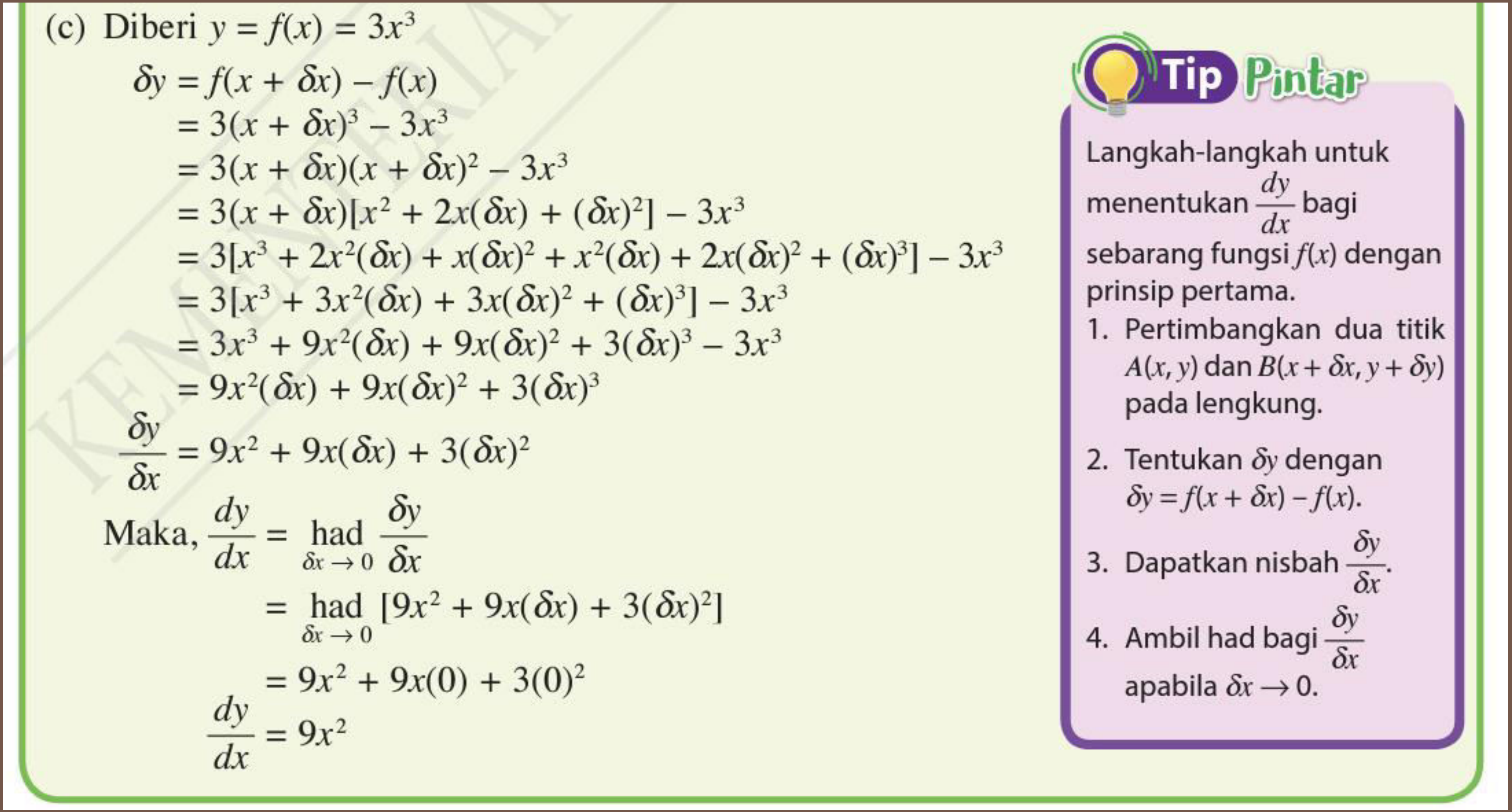
$$\begin{aligned} \delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \delta x)^2 - 3x^2 \\ &= 3[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^2 \\ &= 3x^2 + 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2 - 3x^2 \\ &= 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2 \\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 6x + 3\delta x \end{aligned}$$

$$\text{Maka, } \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (6x + 3\delta x)$$

$$= 6x + 3(0)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$



(c) Diberi $y = f(x) = 3x^3$

$$\begin{aligned}
\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\
&= 3(x + \delta x)^3 - 3x^3 \\
&= 3(x + \delta x)(x + \delta x)^2 - 3x^3 \\
&= 3(x + \delta x)[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^3 \\
&= 3[x^3 + 2x^2(\delta x) + x(\delta x)^2 + x^2(\delta x) + 2x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3 \\
&= 3[x^3 + 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3 \\
&= 3x^3 + 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3 - 3x^3 \\
&= 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2$$

Maka, $\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$

$$\begin{aligned}
&= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} [9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2] \\
&= 9x^2 + 9x(0) + 3(0)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2$$

Tip Pintar

Langkah-langkah untuk menentukan $\frac{dy}{dx}$ bagi sebarang fungsi $f(x)$ dengan prinsip pertama.

1. Pertimbangkan dua titik $A(x, y)$ dan $B(x + \delta x, y + \delta y)$ pada lengkung.
2. Tentukan δy dengan $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.
3. Dapatkan nisbah $\frac{\delta y}{\delta x}$.
4. Ambil had bagi $\frac{\delta y}{\delta x}$ apabila $\delta x \to 0$.

Latihan Kendiri 2.2

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.

(a) $y = x$
(b) $y = 5x$
(c) $y = -4x$
(d) $y = 6x^2$
(e) $y = -x^2$
(f) $y = 2x^3$
(g) $y = \frac{1}{2}x^2$
(h) $y = \frac{1}{x}$

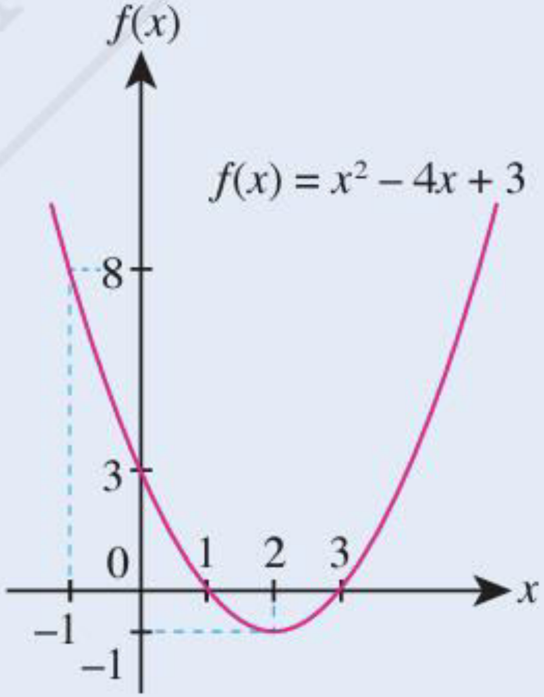
2. Diberi $y = 2x^2 - x + 7$, cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama.

3. Dengan menggunakan prinsip pertama, cari fungsi kecerunan bagi lengkung $y = 3 + x - x^2$.

Latihan Formatif 2.1

Kuiz bit.ly/36ml2zn

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
   (a) Daripada graf, cari setiap yang berikut.
      (i) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
      (iv) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (v) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (vi) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$
   (b) Cari nilai-nilai yang mungkin bagi a jika $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x) = 8$.
   (c) (i) Tentukan fungsi kecerunan tangen, $\dfrac{dy}{dx}$ bagi graf itu dengan menggunakan prinsip pertama.
      (ii) Seterusnya, tentukan kecerunan tangen pada titik (4, 3).



Latihan Formatif 2.1

Kuiz bit.ly/36ml2zn

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

(a) Daripada graf, cari setiap yang berikut.

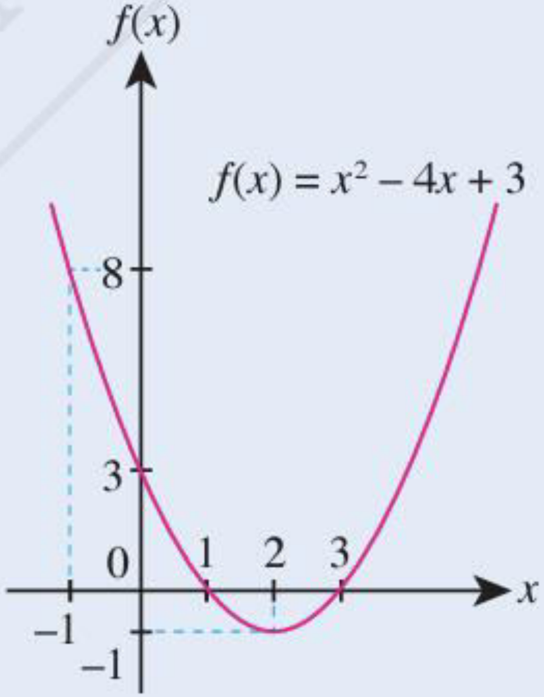
(i) $\underset{x \to -1}{\text{had}}\ f(x)$ (ii) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\ f(x)$ (iii) $\underset{x \to 1}{\text{had}}\ f(x)$

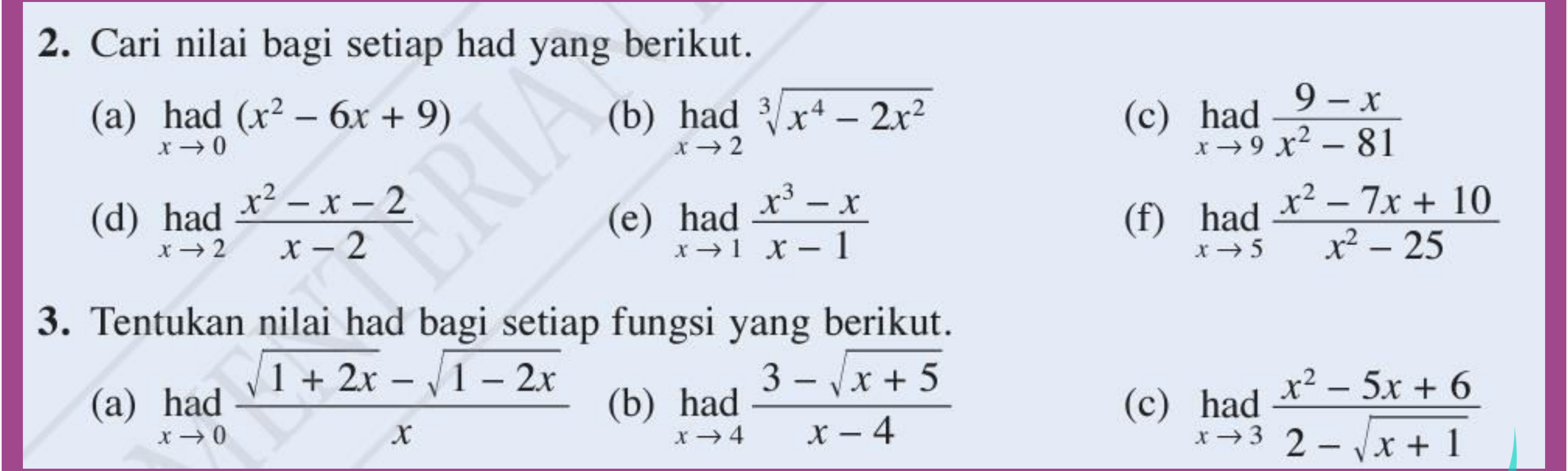
(iv) $\underset{x \to 2}{\text{had}}\ f(x)$ (v) $\underset{x \to 3}{\text{had}}\ f(x)$ (vi) $\underset{x \to 4}{\text{had}}\ f(x)$

(b) Cari nilai-nilai yang mungkin bagi a jika $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x) = 8$.

(c) (i) Tentukan fungsi kecerunan tangen, $\frac{dy}{dx}$ bagi graf itu dengan menggunakan prinsip pertama.

(ii) Seterusnya, tentukan kecerunan tangen pada titik (4, 3).





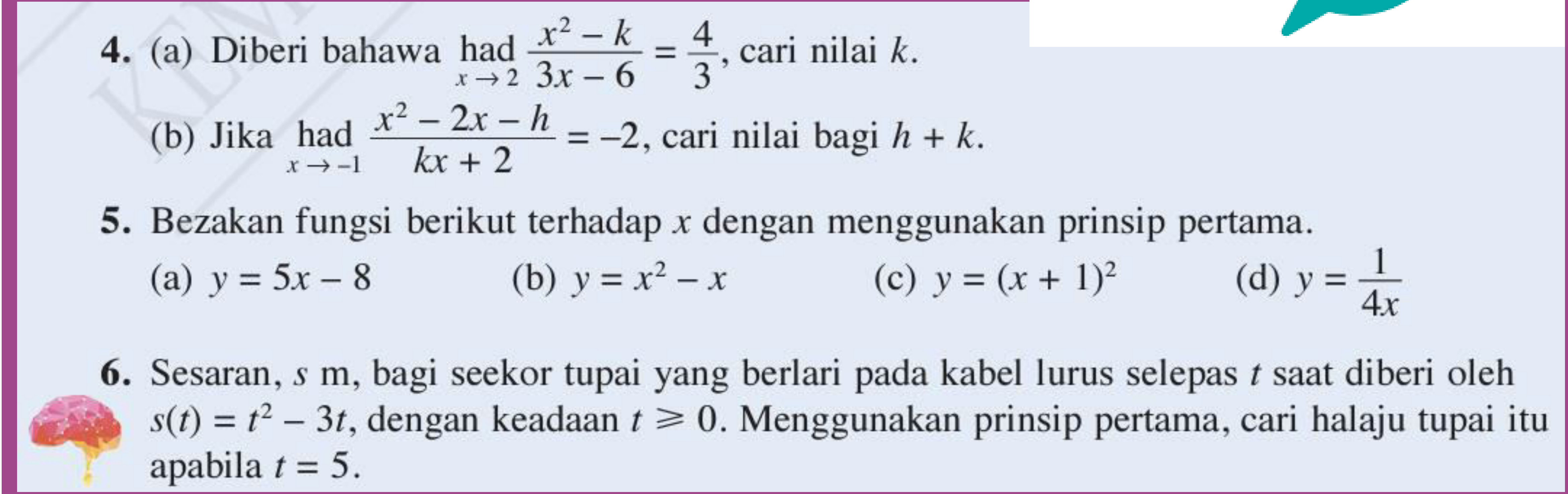
2. Cari nilai bagi setiap had yang berikut.

(a) $\displaystyle \text{had}_{x \to 0} (x^2 - 6x + 9)$ (b) $\displaystyle \text{had}_{x \to 2} \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$ (c) $\displaystyle \text{had}_{x \to 9} \frac{9 - x}{x^2 - 81}$

(d) $\displaystyle \text{had}_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (e) $\displaystyle \text{had}_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1}$ (f) $\displaystyle \text{had}_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}$

3. Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $\displaystyle \text{had}_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{x}$ (b) $\displaystyle \text{had}_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{x + 5}}{x - 4}$ (c) $\displaystyle \text{had}_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - \sqrt{x + 1}}$



4. (a) Diberi bahawa $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - k}{3x - 6} = \dfrac{4}{3}$, cari nilai k.

(b) Jika $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - h}{kx + 2} = -2$, cari nilai bagi $h + k$.

5. Bezakan fungsi berikut terhadap x dengan menggunakan prinsip pertama.

(a) $y = 5x - 8$

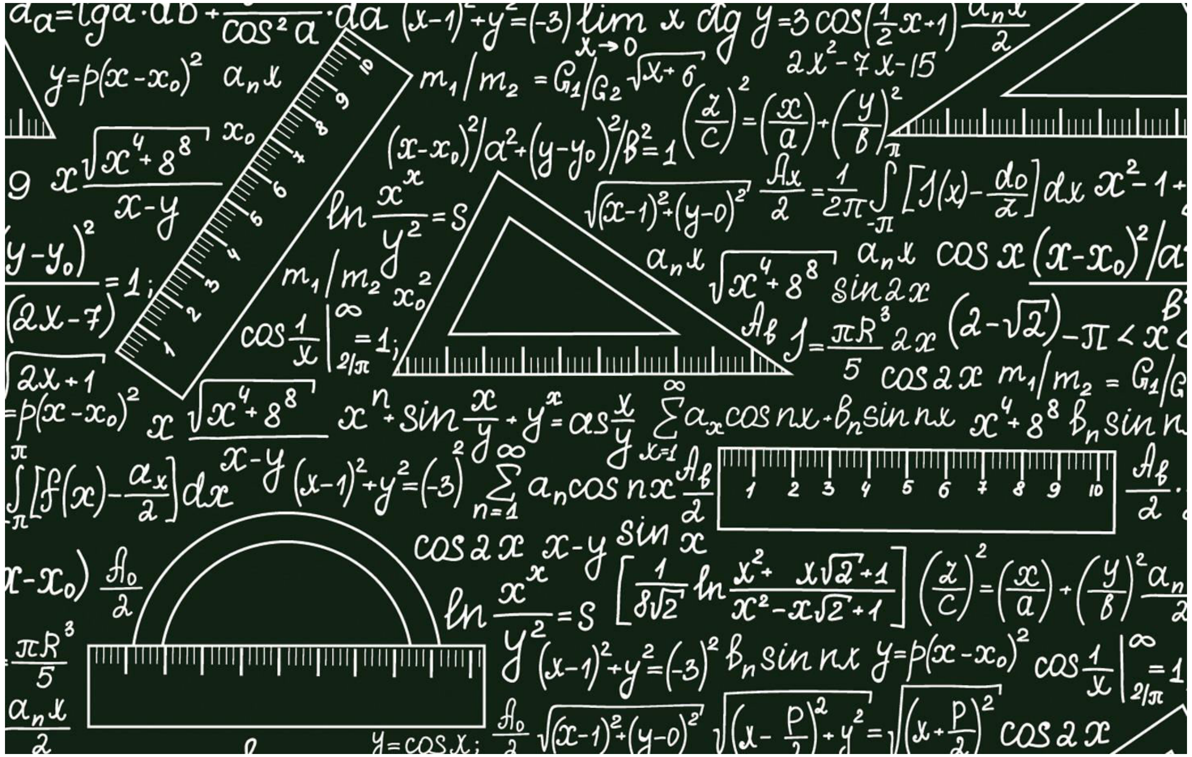
(b) $y = x^2 - x$

(c) $y = (x + 1)^2$

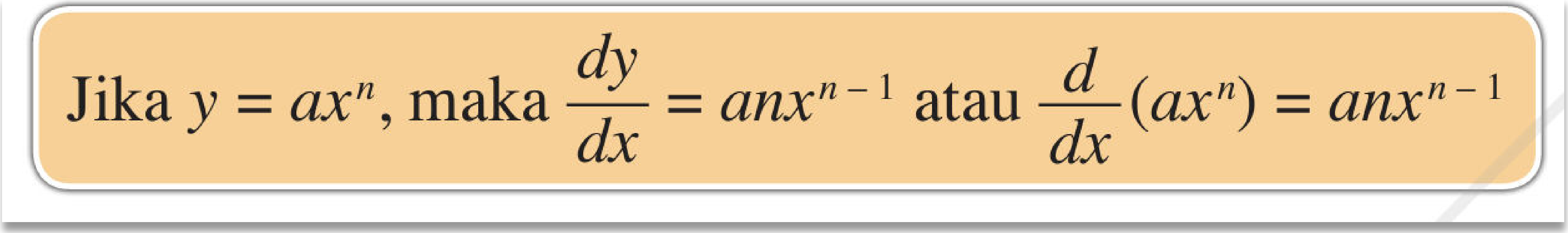
(d) $y = \dfrac{1}{4x}$

6. Sesaran, s m, bagi seekor tupai yang berlari pada kabel lurus selepas t saat diberi oleh $s(t) = t^2 - 3t$, dengan keadaan $t \geqslant 0$. Menggunakan prinsip pertama, cari halaju tupai itu apabila $t = 5$.

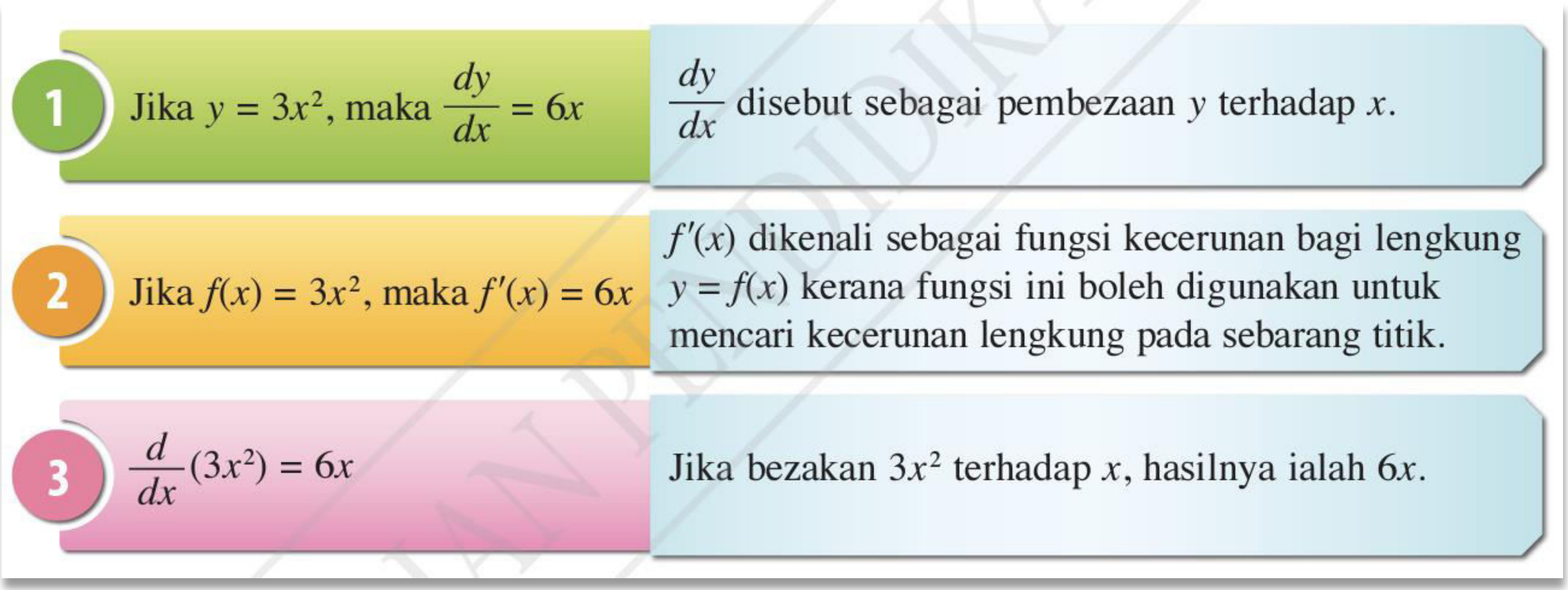
Pembezaan Peringkat Pertama



Pembezaan Peringkat Pertama

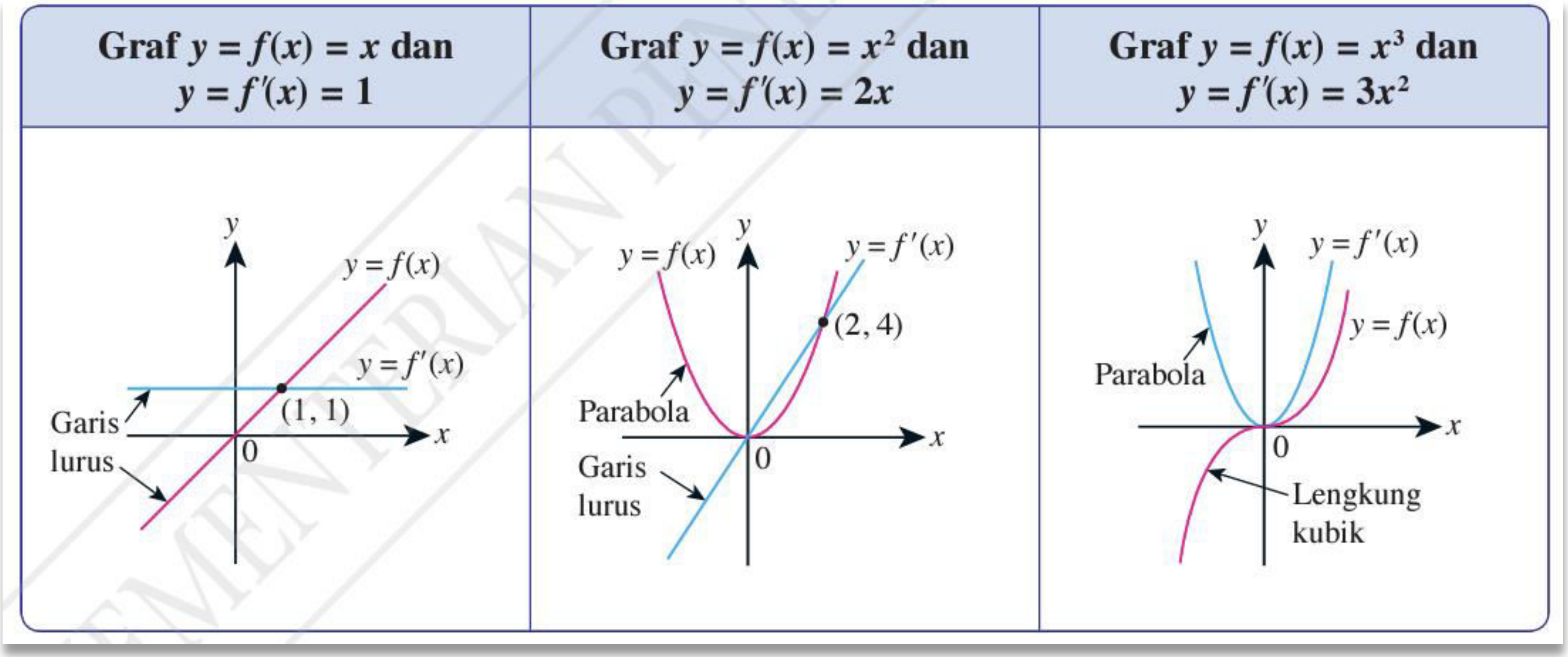


Jika $y = ax^n$, maka $\dfrac{dy}{dx} = anx^{n-1}$ atau $\dfrac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$



1	Jika $y = 3x^2$, maka $\frac{dy}{dx} = 6x$	$\frac{dy}{dx}$ disebut sebagai pembezaan y terhadap x.
2	Jika $f(x) = 3x^2$, maka $f'(x) = 6x$	$f'(x)$ dikenali sebagai fungsi kecerunan bagi lengkung $y = f(x)$ kerana fungsi ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan lengkung pada sebarang titik.
3	$\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$	Jika bezakan $3x^2$ terhadap x, hasilnya ialah $6x$.

Tiga tatatanda terbitan pertama



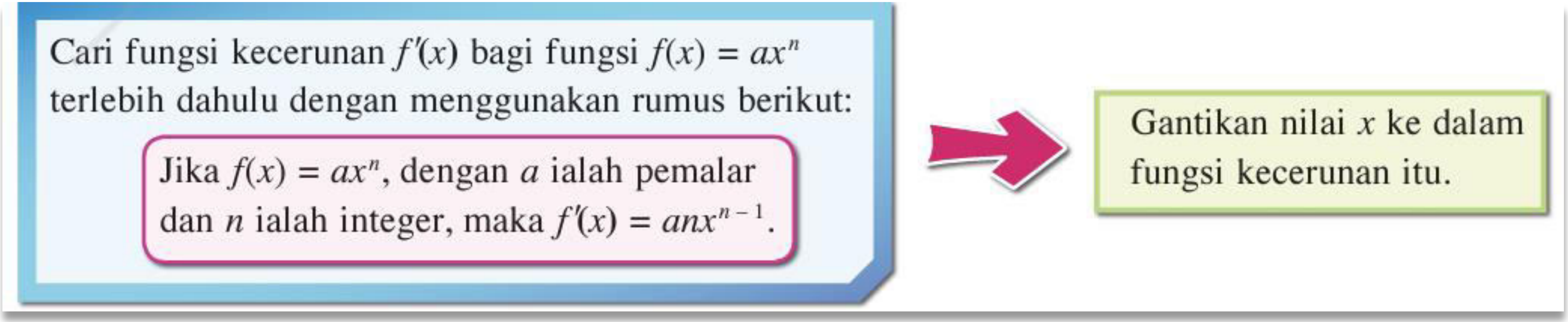
Graf $y = f(x) = x$ dan $y = f'(x) = 1$

Graf $y = f(x) = x^2$ dan $y = f'(x) = 2x$

Graf $y = f(x) = x^3$ dan $y = f'(x) = 3x^2$

Menentukan terbitan pertama bagi suatu fungsi algebra

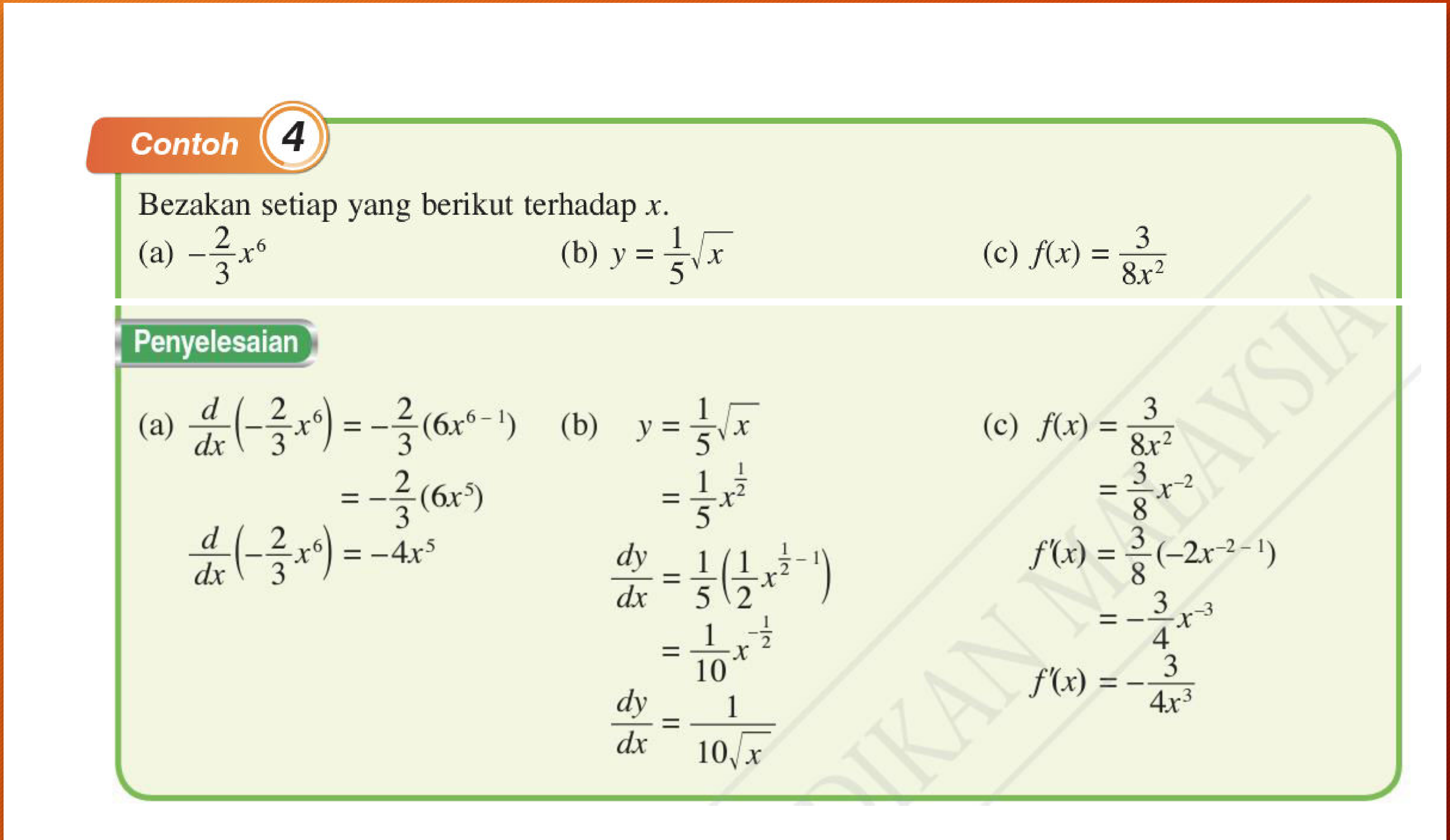
Langkah-langkah untuk menentukan kecerunan bagi lengkung f (x) pada suatu titik



Cari fungsi kecerunan $f'(x)$ bagi fungsi $f(x) = ax^n$ terlebih dahulu dengan menggunakan rumus berikut:

Jika $f(x) = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, maka $f'(x) = anx^{n-1}$.

Gantikan nilai x ke dalam fungsi kecerunan itu.



Contoh 4

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $-\frac{2}{3}x^6$

(b) $y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

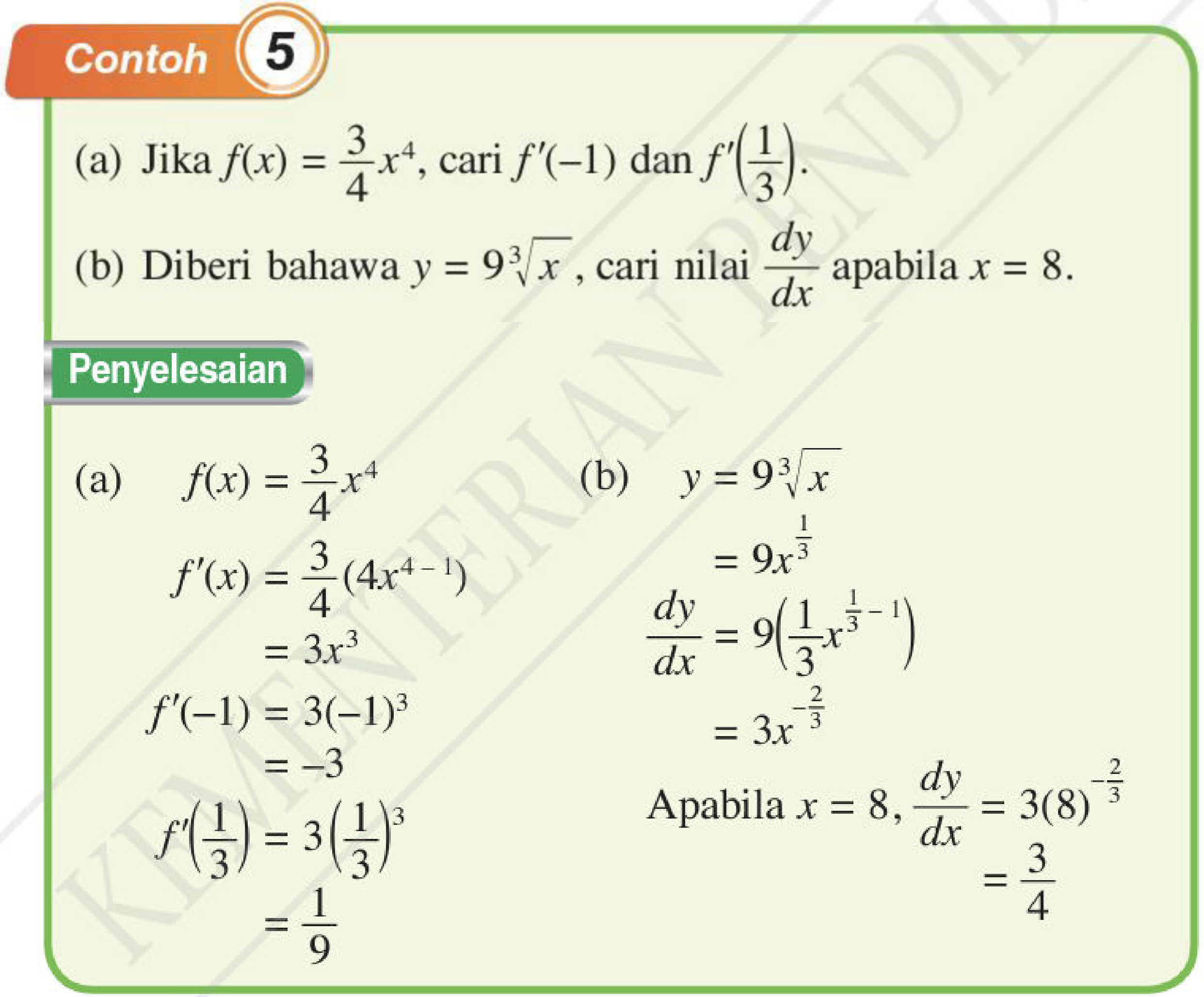
(c) $f(x) = \frac{3}{8x^2}$

Penyelesaian

(a)
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -\frac{2}{3}(6x^{6-1})$$
$$= -\frac{2}{3}(6x^5)$$
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -4x^5$$

(b)
$$y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$$
$$= \frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)$$
$$= \frac{1}{10}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10\sqrt{x}}$$

(c)
$$f(x) = \frac{3}{8x^2}$$
$$= \frac{3}{8}x^{-2}$$
$$f'(x) = \frac{3}{8}(-2x^{-2-1})$$
$$= -\frac{3}{4}x^{-3}$$
$$f'(x) = -\frac{3}{4x^3}$$



Contoh 5

(a) Jika $f(x) = \frac{3}{4}x^4$, cari $f'(-1)$ dan $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

(b) Diberi bahawa $y = 9\sqrt[3]{x}$, cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 8$.

Penyelesaian

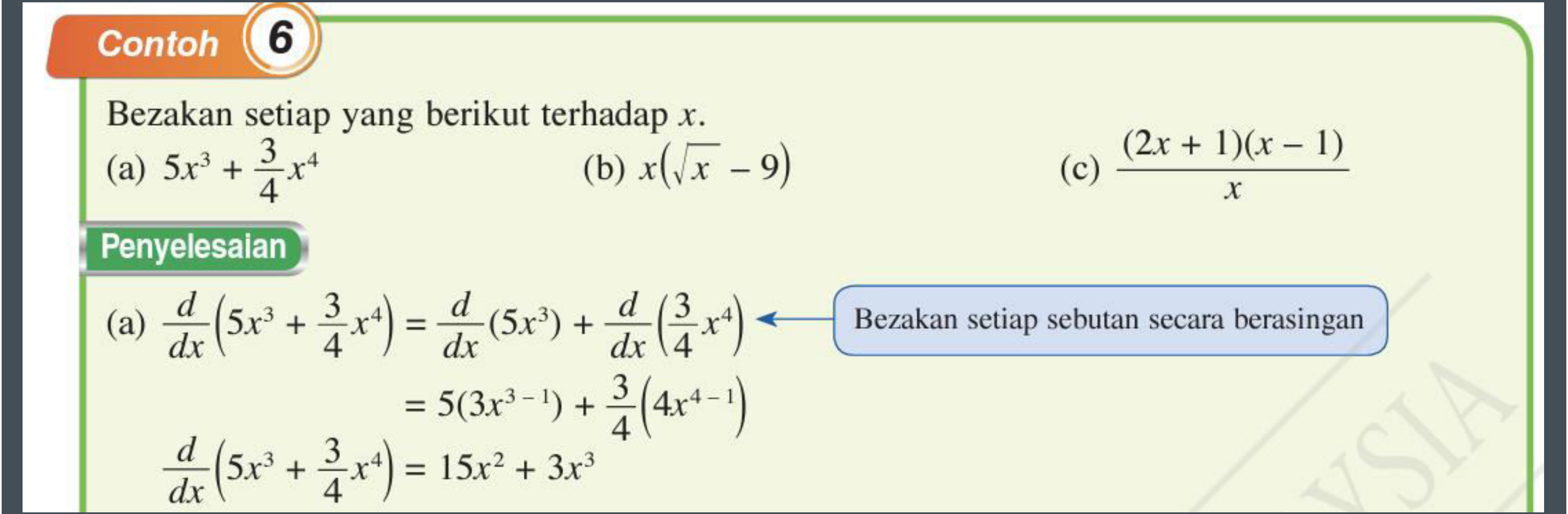
(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}x^4 \\ f'(x) &= \frac{3}{4}(4x^{4-1}) \\ &= 3x^3 \\ f'(-1) &= 3(-1)^3 \\ &= -3 \\ f'\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} y &= 9\sqrt[3]{x} \\ &= 9x^{\frac{1}{3}} \\ \frac{dy}{dx} &= 9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) \\ &= 3x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Apabila $x = 8$, $\frac{dy}{dx} = 3(8)^{-\frac{2}{3}}$
$$= \frac{3}{4}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Terbitan bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan atau penolakan sebutan-sebutan algebra pula boleh diperoleh dengan membezakan fungsi itu sebutan demi sebutan secara berasingan.



Contoh 6

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $5x^3 + \frac{3}{4}x^4$ (b) $x\left(\sqrt{x} - 9\right)$ (c) $\frac{(2x + 1)(x - 1)}{x}$

Penyelesaian

(a) $$\frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4\right) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^4\right)$$

Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$$= 5(3x^{3-1}) + \frac{3}{4}\left(4x^{4-1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4\right) = 15x^2 + 3x^3$$

(b) Katakan $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 9\right)$

$$= x^{\frac{3}{2}} - 9x$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2} - 1} - 9(1x^{1 - 1})$$ ← Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 9$$

(c) Katakan $y = \dfrac{(2x + 1)(x - 1)}{x}$

$$= \frac{2x^2 - x - 1}{x}$$

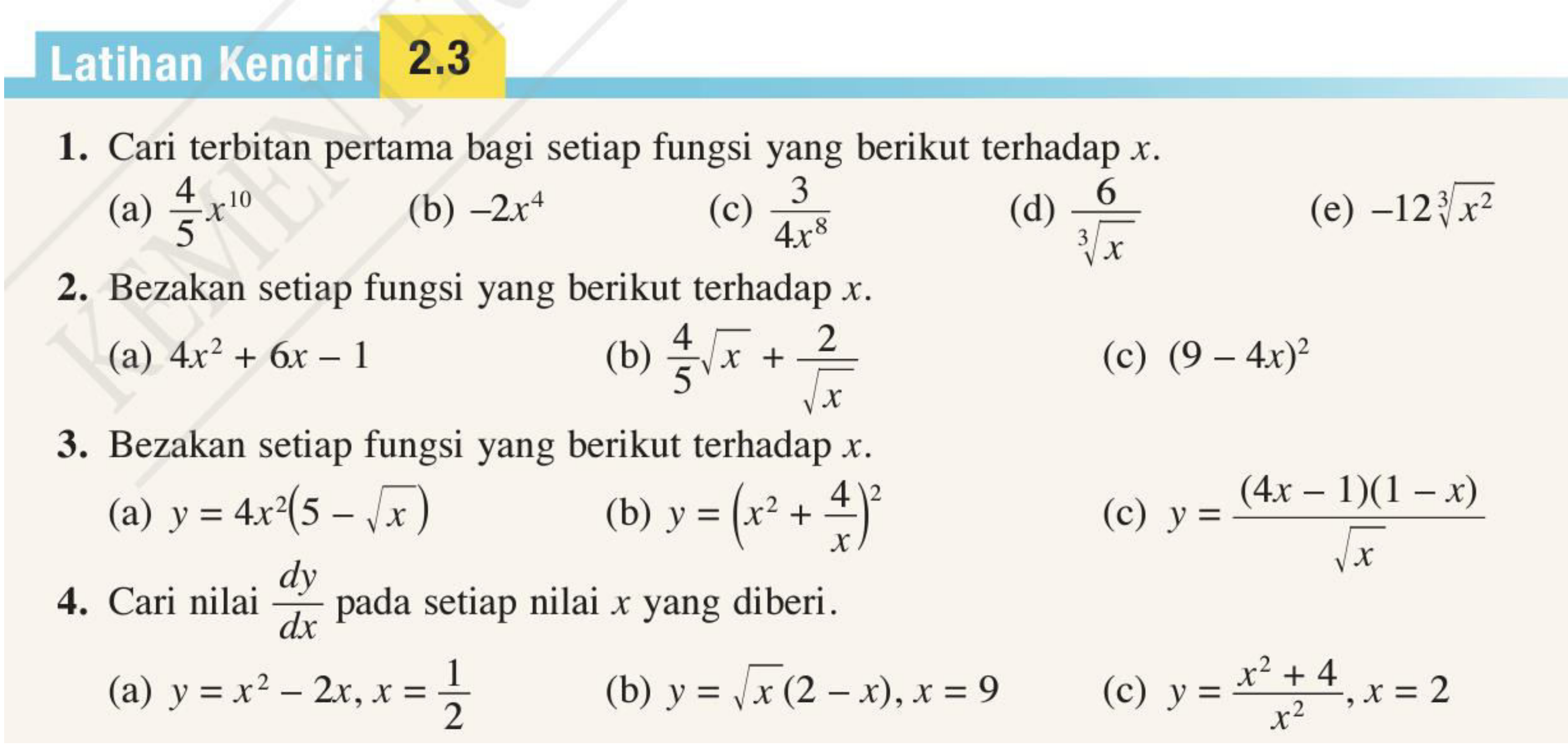
$$= 2x - 1 - x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^{-1})$$ ← Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$$= 2x^{1 - 1} - 0x^{0 - 1} - (-1x^{-1 - 1})$$

$$= 2 + x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{1}{x^2}$$



Latihan Kendiri 2.3

1. Cari terbitan pertama bagi setiap fungsi yang berikut terhadap x.

(a) $\frac{4}{5}x^{10}$ (b) $-2x^4$ (c) $\frac{3}{4x^8}$ (d) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ (e) $-12\sqrt[3]{x^2}$

2. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x.

(a) $4x^2 + 6x - 1$ (b) $\frac{4}{5}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ (c) $(9 - 4x)^2$

3. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x.

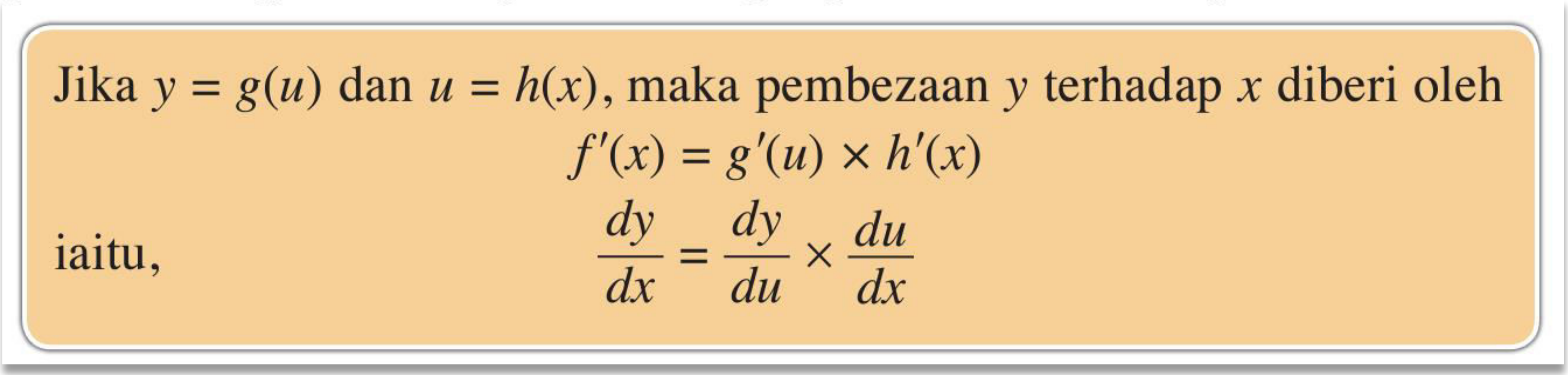
(a) $y = 4x^2(5 - \sqrt{x})$ (b) $y = \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^2$ (c) $y = \frac{(4x - 1)(1 - x)}{\sqrt{x}}$

4. Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x yang diberi.

(a) $y = x^2 - 2x, x = \frac{1}{2}$ (b) $y = \sqrt{x}(2 - x), x = 9$ (c) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2}, x = 2$

Terbitan pertama fungsi gubahan - petua rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$



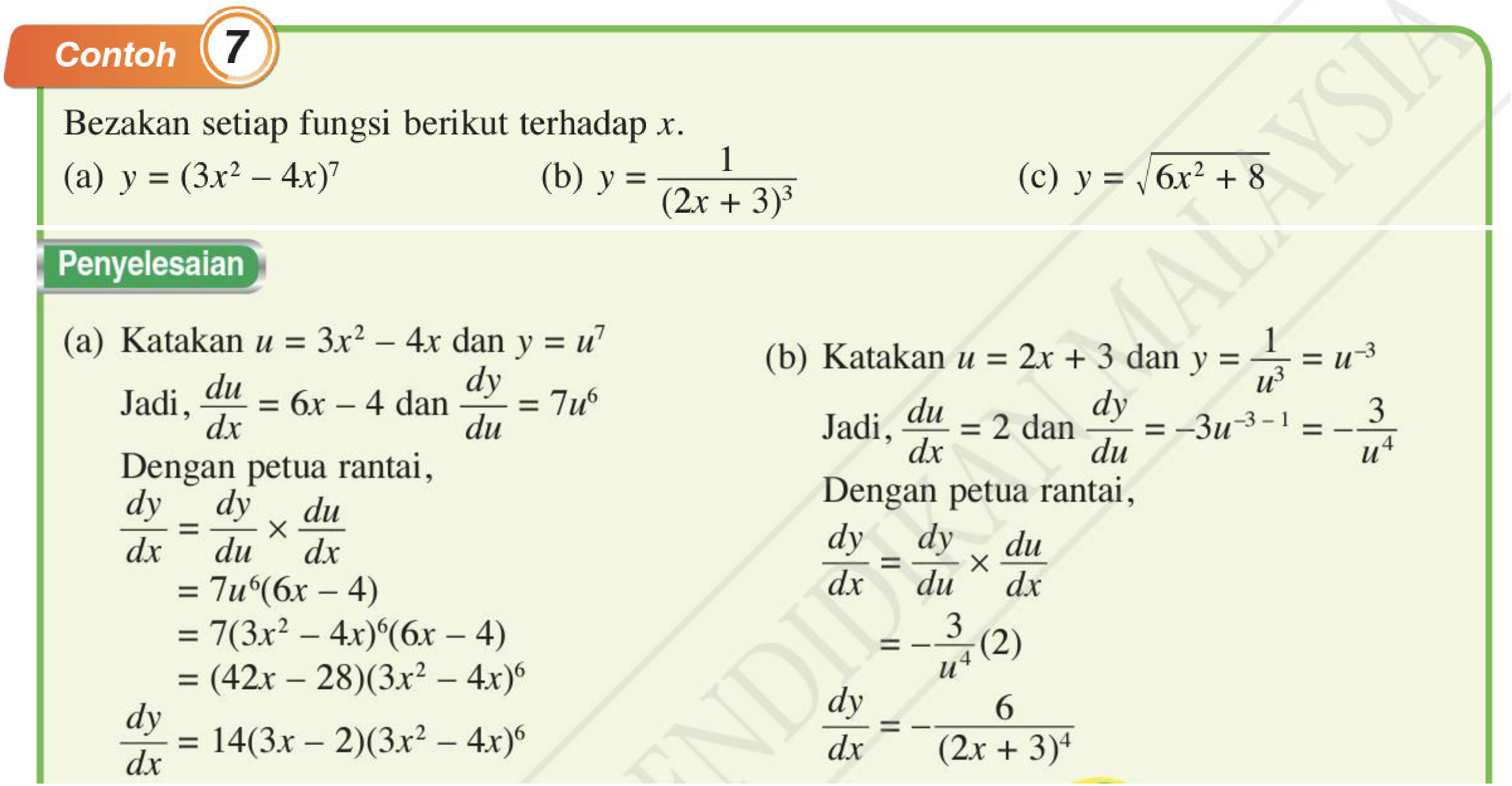
Jika $y = g(u)$ dan $u = h(x)$, maka pembezaan y terhadap x diberi oleh

$$f'(x) = g'(u) \times h'(x)$$

iaitu,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

terbitan pertama bagi suatu fungsi gubahan



Contoh 7

Bezakan setiap fungsi berikut terhadap x.

(a) $y = (3x^2 - 4x)^7$

(b) $y = \dfrac{1}{(2x + 3)^3}$

(c) $y = \sqrt{6x^2 + 8}$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 3x^2 - 4x$ dan $y = u^7$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 6x - 4$ dan $\dfrac{dy}{du} = 7u^6$

Dengan petua rantai,

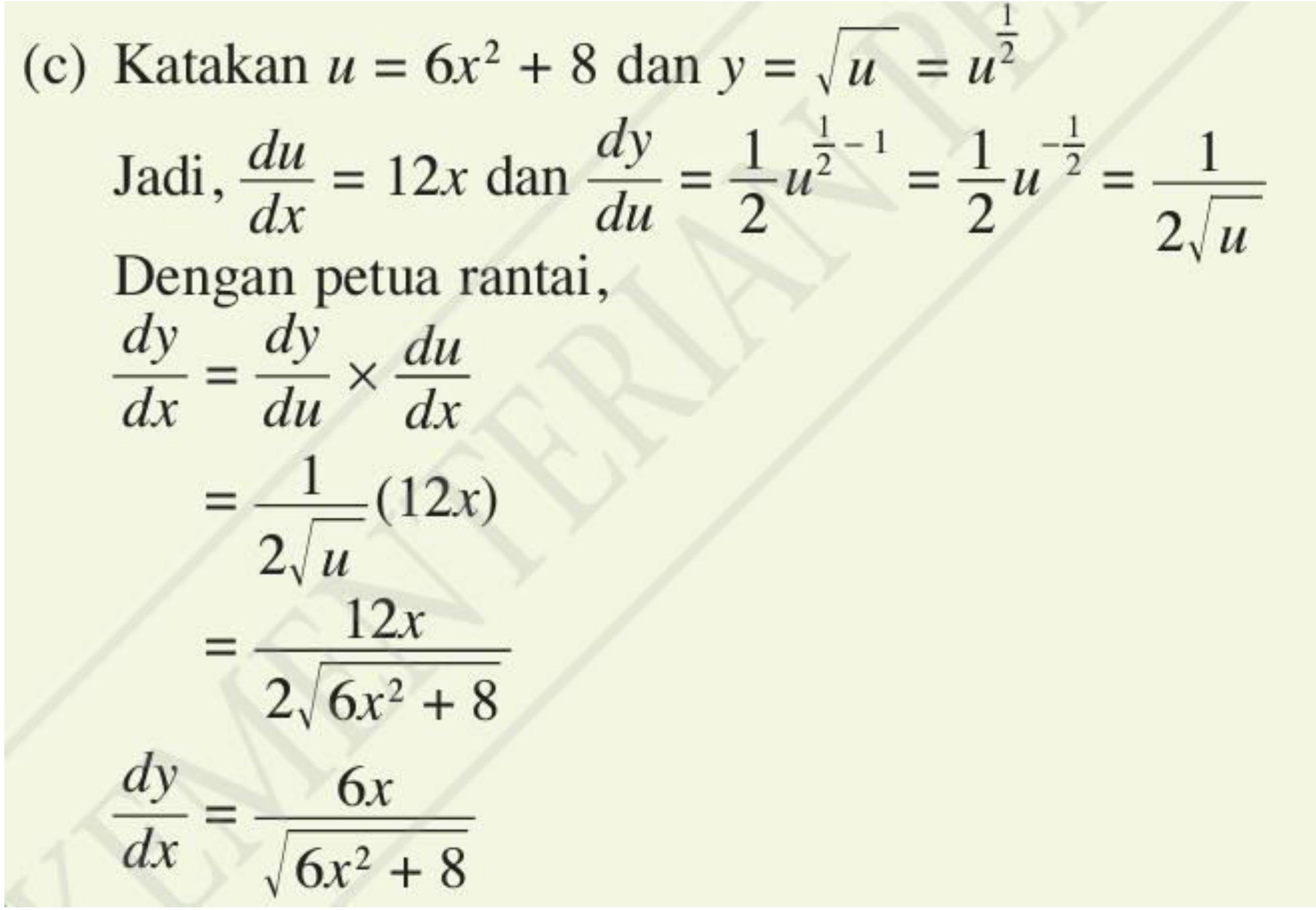
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= 7u^6(6x - 4)\\ &= 7(3x^2 - 4x)^6(6x - 4)\\ &= (42x - 28)(3x^2 - 4x)^6\\ \frac{dy}{dx} &= 14(3x - 2)(3x^2 - 4x)^6\end{aligned}$$

(b) Katakan $u = 2x + 3$ dan $y = \dfrac{1}{u^3} = u^{-3}$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 2$ dan $\dfrac{dy}{du} = -3u^{-3-1} = -\dfrac{3}{u^4}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= -\frac{3}{u^4}(2)\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{6}{(2x + 3)^4}\end{aligned}$$



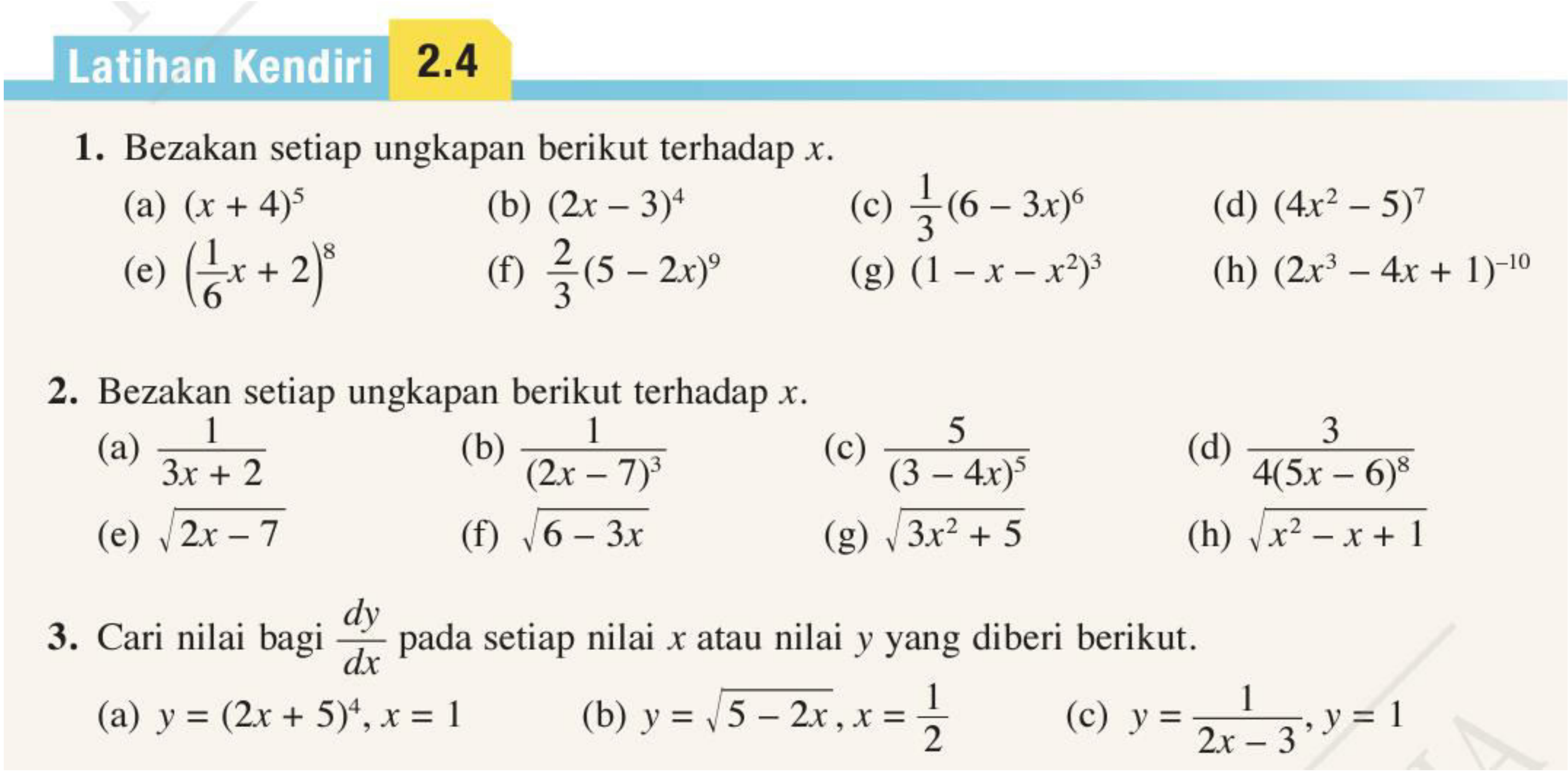
(c) Katakan $u = 6x^2 + 8$ dan $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 12x$ dan $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(12x)\\ &= \frac{12x}{2\sqrt{6x^2+8}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{\sqrt{6x^2+8}}$$



Latihan Kendiri 2.4

1. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x.

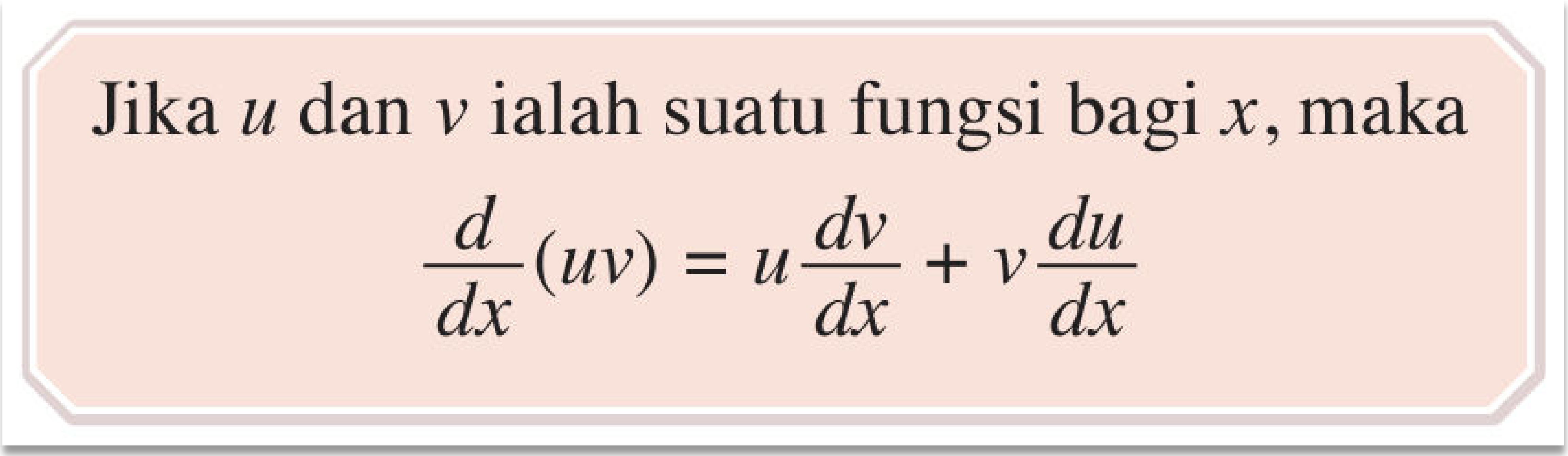
(a) $(x + 4)^5$
(b) $(2x - 3)^4$
(c) $\frac{1}{3}(6 - 3x)^6$
(d) $(4x^2 - 5)^7$
(e) $\left(\frac{1}{6}x + 2\right)^8$
(f) $\frac{2}{3}(5 - 2x)^9$
(g) $(1 - x - x^2)^3$
(h) $(2x^3 - 4x + 1)^{-10}$

2. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x.

(a) $\frac{1}{3x + 2}$
(b) $\frac{1}{(2x - 7)^3}$
(c) $\frac{5}{(3 - 4x)^5}$
(d) $\frac{3}{4(5x - 6)^8}$
(e) $\sqrt{2x - 7}$
(f) $\sqrt{6 - 3x}$
(g) $\sqrt{3x^2 + 5}$
(h) $\sqrt{x^2 - x + 1}$

3. Cari nilai bagi $\frac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x atau nilai y yang diberi berikut.

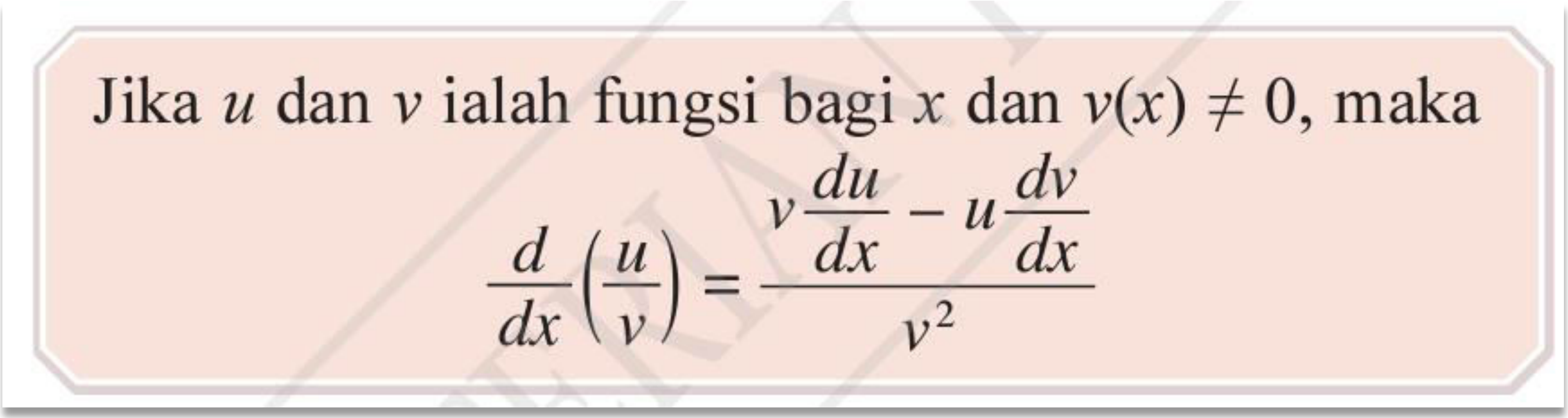
(a) $y = (2x + 5)^4$, $x = 1$
(b) $y = \sqrt{5 - 2x}$, $x = \frac{1}{2}$
(c) $y = \frac{1}{2x - 3}$, $y = 1$



Jika u dan v ialah suatu fungsi bagi x, maka

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

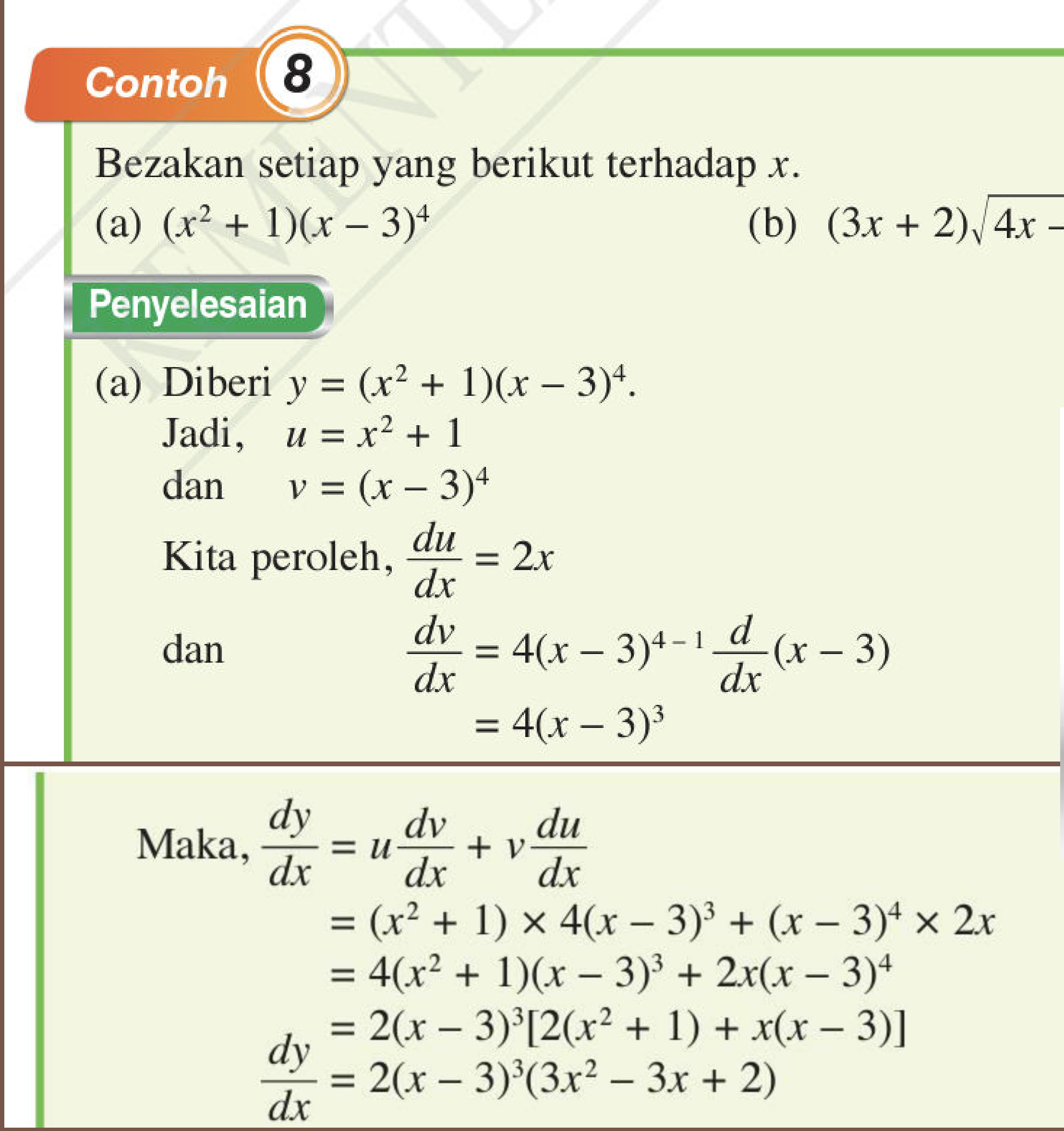
Terbitan pertama bagi suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dan hasil bahagi ungkapan algebra



Jika u dan v ialah fungsi bagi x dan $v(x) \neq 0$, maka

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

petua hasil bahagi



Contoh 8

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $(x^2 + 1)(x - 3)^4$ (b) $(3x + 2)\sqrt{4x - 1}$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = (x^2 + 1)(x - 3)^4$.

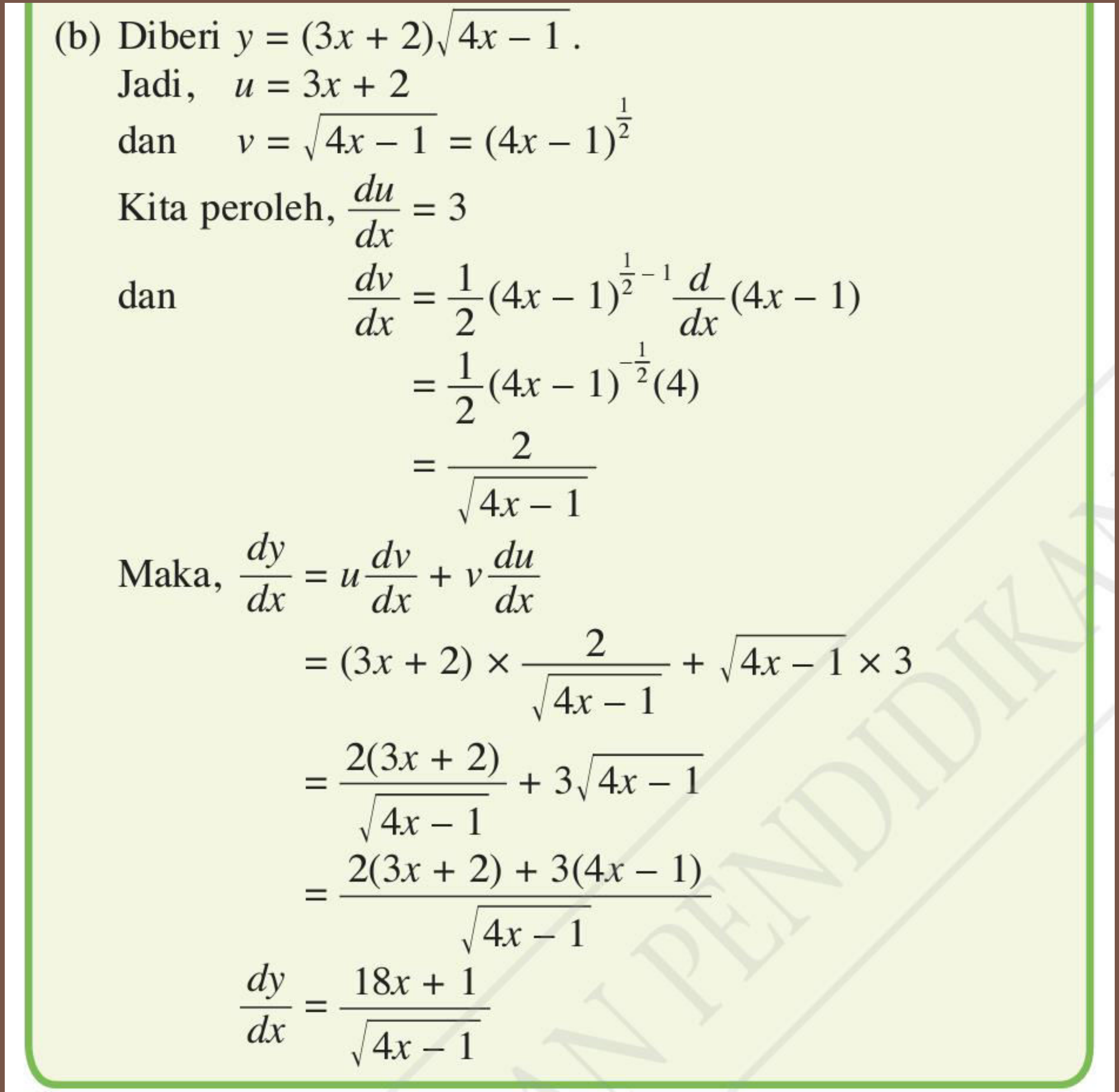
Jadi, $u = x^2 + 1$

dan $v = (x - 3)^4$

Kita peroleh, $\frac{du}{dx} = 2x$

dan
$$\frac{dv}{dx} = 4(x - 3)^{4-1}\frac{d}{dx}(x - 3)$$
$$= 4(x - 3)^3$$

Maka,
$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= (x^2 + 1) \times 4(x - 3)^3 + (x - 3)^4 \times 2x$$
$$= 4(x^2 + 1)(x - 3)^3 + 2x(x - 3)^4$$
$$= 2(x - 3)^3[2(x^2 + 1) + x(x - 3)]$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(x - 3)^3(3x^2 - 3x + 2)$$



(b) Diberi $y = (3x + 2)\sqrt{4x - 1}$.

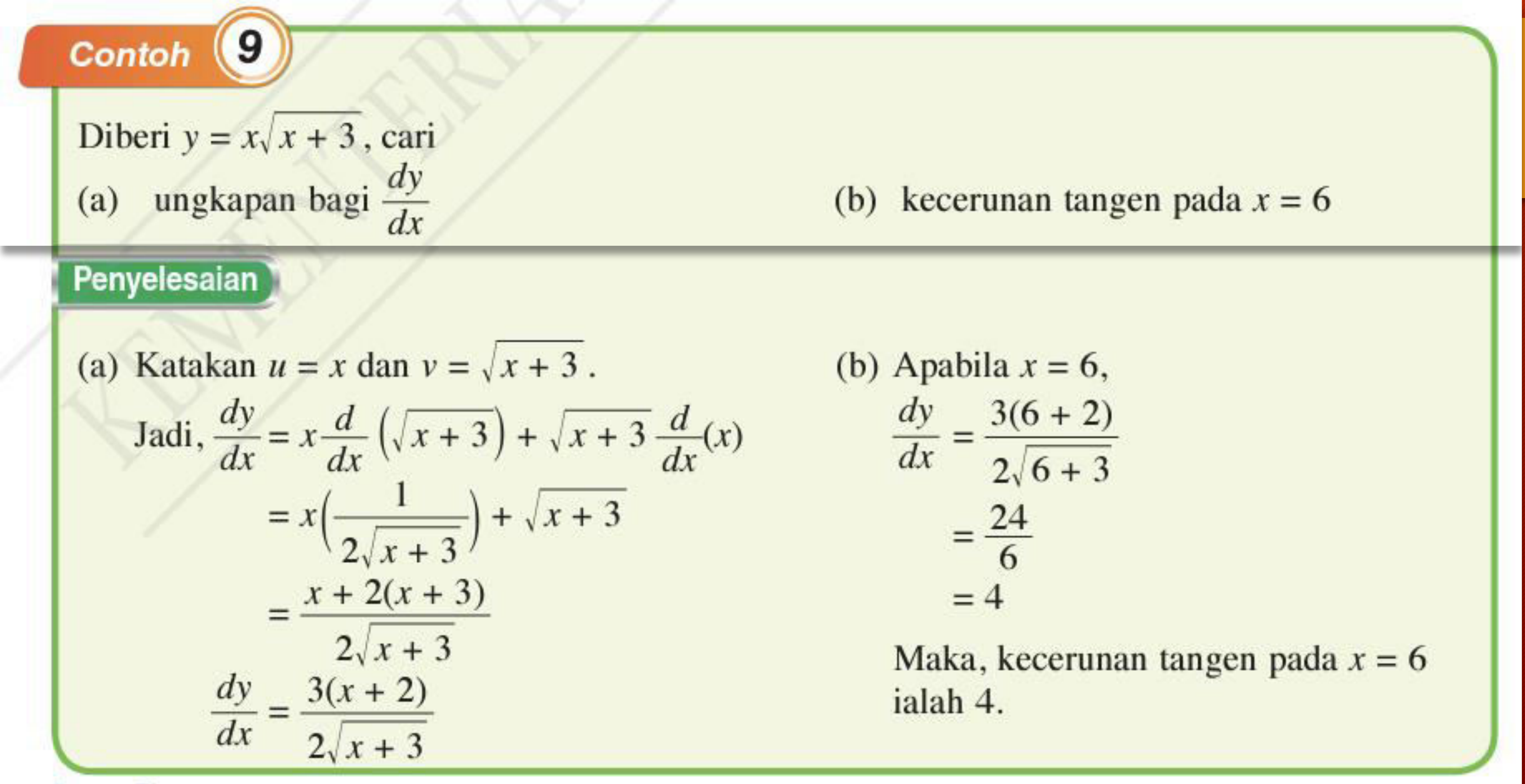
Jadi, $u = 3x + 2$

dan $v = \sqrt{4x - 1} = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$

Kita peroleh, $\frac{du}{dx} = 3$

dan
$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= \frac{1}{2}(4x - 1)^{\frac{1}{2} - 1}\frac{d}{dx}(4x - 1)\\ &= \frac{1}{2}(4x - 1)^{-\frac{1}{2}}(4)\\ &= \frac{2}{\sqrt{4x - 1}}\end{aligned}$$

Maka,
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= (3x + 2) \times \frac{2}{\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x - 1} \times 3\\ &= \frac{2(3x + 2)}{\sqrt{4x - 1}} + 3\sqrt{4x - 1}\\ &= \frac{2(3x + 2) + 3(4x - 1)}{\sqrt{4x - 1}}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{18x + 1}{\sqrt{4x - 1}}\end{aligned}$$



Contoh 9

Diberi $y = x\sqrt{x + 3}$, cari

(a) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$

(b) kecerunan tangen pada $x = 6$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = x$ dan $v = \sqrt{x + 3}$.

$$\text{Jadi, } \frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x + 3}\right) + \sqrt{x + 3}\,\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\left(\frac{1}{2\sqrt{x + 3}}\right) + \sqrt{x + 3}$$

$$= \frac{x + 2(x + 3)}{2\sqrt{x + 3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x + 2)}{2\sqrt{x + 3}}$$

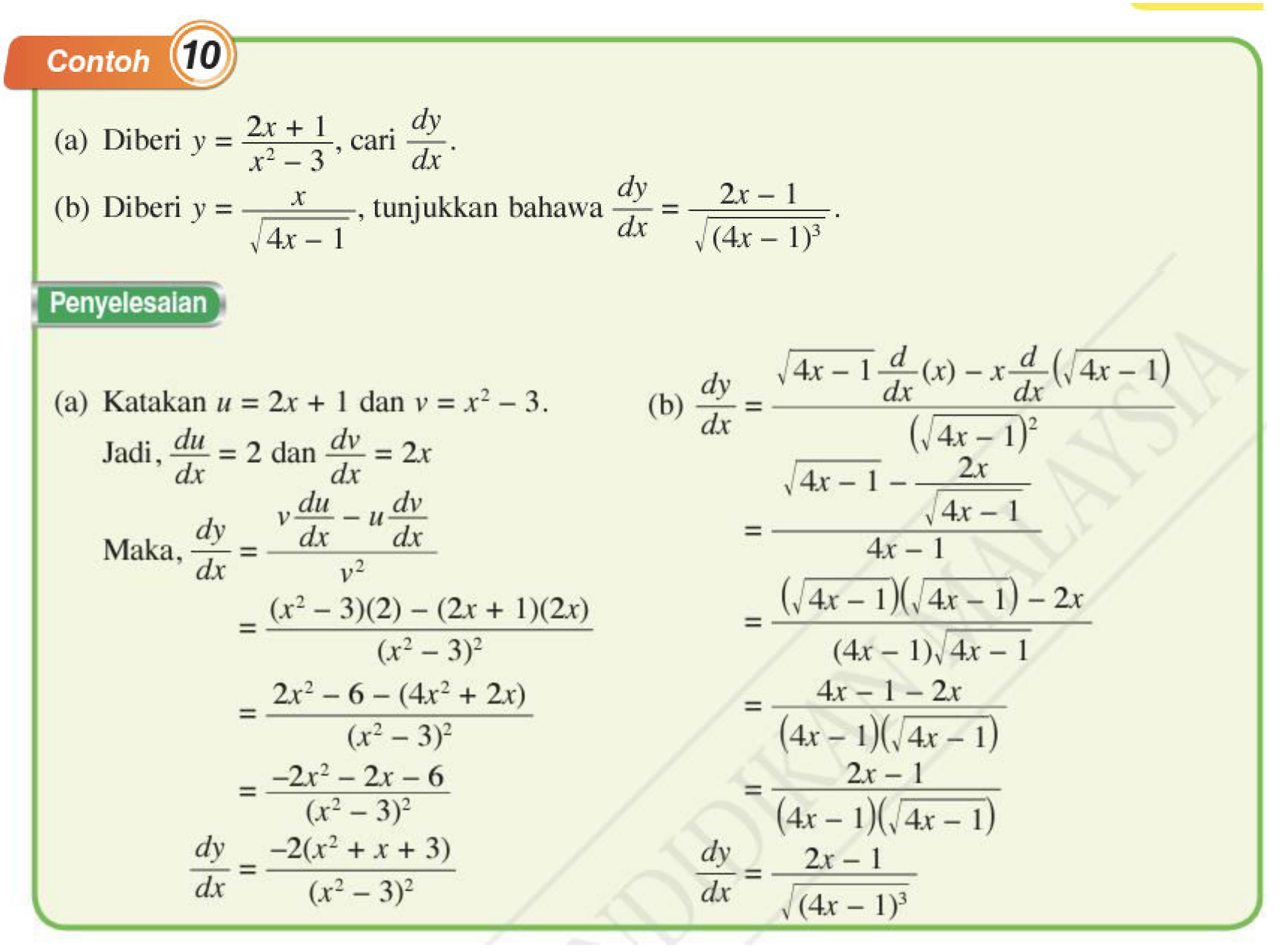
(b) Apabila $x = 6$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(6 + 2)}{2\sqrt{6 + 3}}$$

$$= \frac{24}{6}$$

$$= 4$$

Maka, kecerunan tangen pada $x = 6$ ialah 4.



Contoh 10

(a) Diberi $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 3}$, cari $\frac{dy}{dx}$.

(b) Diberi $y = \frac{x}{\sqrt{4x - 1}}$, tunjukkan bahawa $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{\sqrt{(4x - 1)^3}}$.

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 2x + 1$ dan $v = x^2 - 3$.

Jadi, $\frac{du}{dx} = 2$ dan $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\text{Maka, } \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 3)(2) - (2x + 1)(2x)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 6 - (4x^2 + 2x)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x - 6}{(x^2 - 3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x^2 + x + 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4x - 1}\,\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4x - 1}\right)}{\left(\sqrt{4x - 1}\right)^2}$$

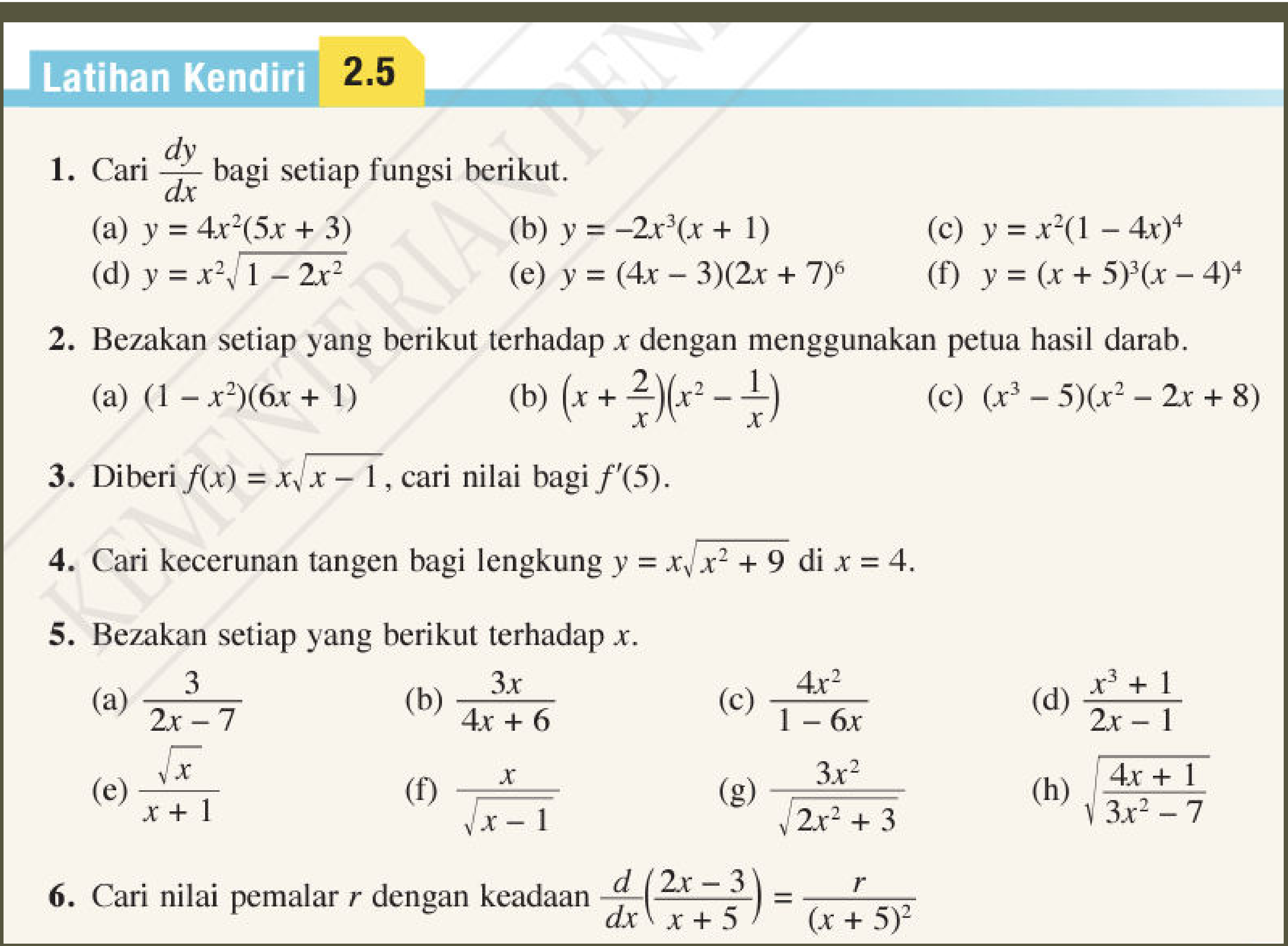
$$= \frac{\sqrt{4x - 1} - \frac{2x}{\sqrt{4x - 1}}}{4x - 1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4x - 1}\right)\left(\sqrt{4x - 1}\right) - 2x}{(4x - 1)\sqrt{4x - 1}}$$

$$= \frac{4x - 1 - 2x}{(4x - 1)\left(\sqrt{4x - 1}\right)}$$

$$= \frac{2x - 1}{(4x - 1)\left(\sqrt{4x - 1}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{\sqrt{(4x - 1)^3}}$$



Latihan Kendiri 2.5

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = 4x^2(5x + 3)$
(b) $y = -2x^3(x + 1)$
(c) $y = x^2(1 - 4x)^4$
(d) $y = x^2\sqrt{1 - 2x^2}$
(e) $y = (4x - 3)(2x + 7)^6$
(f) $y = (x + 5)^3(x - 4)^4$

2. Bezakan setiap yang berikut terhadap x dengan menggunakan petua hasil darab.

(a) $(1 - x^2)(6x + 1)$
(b) $\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$
(c) $(x^3 - 5)(x^2 - 2x + 8)$

3. Diberi $f(x) = x\sqrt{x - 1}$, cari nilai bagi $f'(5)$.

4. Cari kecerunan tangen bagi lengkung $y = x\sqrt{x^2 + 9}$ di $x = 4$.

5. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $\frac{3}{2x - 7}$
(b) $\frac{3x}{4x + 6}$
(c) $\frac{4x^2}{1 - 6x}$
(d) $\frac{x^3 + 1}{2x - 1}$
(e) $\frac{\sqrt{x}}{x + 1}$
(f) $\frac{x}{\sqrt{x - 1}}$
(g) $\frac{3x^2}{\sqrt{2x^2 + 3}}$
(h) $\sqrt{\frac{4x + 1}{3x^2 - 7}}$

6. Cari nilai pemalar r dengan keadaan $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x - 3}{x + 5}\right) = \frac{r}{(x + 5)^2}$

Latihan Formatif 2.2

Kuiz bit.ly/2RHHFu2

1. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $9x^2 - \dfrac{3}{x^2}$

(b) $\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{1}{x} + 8$

(c) $5x + 4\sqrt{x} - 7$

(d) $\dfrac{10}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

(e) $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^2$

(f) $\dfrac{8x^2 + x}{\sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{4}{9x^3} - \pi x + 6$

(h) $\sqrt{x}\,(2 - x)$

2. Jika $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}}$, cari nilai bagi $f'(8)$.

3. Diberi $f(t) = \dfrac{6t^3}{\sqrt[3]{t}}$,

(a) permudahkan $f(t)$,

(b) cari $f'(t)$,

(c) cari nilai bagi $f'\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

4. Diberi $s = 3t^2 + 5t - 7$, cari $\frac{ds}{dt}$ dan julat nilai t dengan keadaan $\frac{ds}{dt}$ adalah negatif.

5. Diberi $\frac{dy}{dx}$ bagi fungsi $y = ax^3 + bx^2 + 3$ pada titik $(1, 4)$ ialah 7, cari nilai a dan nilai b.

6. Cari koordinat titik pada fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ dengan keadaan $\frac{dy}{dx}$ ialah 3.

7. Diberi fungsi $h(x) = kx^3 - 4x^2 - 5x$, cari

(a) $h'(x)$, dalam sebutan k,

(b) nilai k jika $h'(1) = 8$.

8. Cari $\frac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{6} - 1\right)^4$

(b) $y = \frac{1}{12}(10x - 3)^6$

(c) $y = \frac{8}{2 - 5x}$

(d) $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

(e) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 9x}}$

(f) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 6}$

9. Jika $y = \frac{24}{(3x - 5)^2}$, cari nilai bagi $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$.

10. Cari nilai bagi pemalar a dan pemalar b dengan keadaan $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{(3x-2)^3}\right) = -\dfrac{a}{(3x-2)^b}$

11. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $4x(2x-1)^5$
(b) $x^4(3x+1)^7$
(c) $x\sqrt{x+3}$
(d) $(x+7)^5(x-5)^3$
(e) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
(f) $\dfrac{x}{\sqrt{4x+1}}$
(g) $\dfrac{1}{x^2+2x+7}$
(h) $\dfrac{1-2x^3}{x-1}$

12. Tunjukkan bahawa jika $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$, maka $f'(x) = \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$

13. Diberi $y = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$, cari $\dfrac{dy}{dx}$ dan tentukan julat nilai x dengan keadaan semua nilai y dan $\dfrac{dy}{dx}$ adalah positif.

14. Diberi $y = \dfrac{x-2}{x^2+5}$, cari julat nilai x dengan keadaan y dan $\dfrac{dy}{dx}$ adalah negatif.

Bersambung